



Università degli Studi di Trento

DIPARTIMENTO DI ECONOMIA E MANAGEMENT

Corso di Laurea in Finanza

**Pricing e markup degli Investment Certificates
nel mercato italiano: un'analisi empirica
mediante il Metodo Monte Carlo**

Relatore:

Prof. Marco Bee

Laureando:

Matteo Polo

Anno Accademico 2024/2025

ABSTRACT

Il presente elaborato conduce la prima analisi empirica sistematica del mercato italiano degli investment certificates, applicando un modello di pricing basato sul metodo Monte Carlo a un campione di 1'235 certificati emessi da 12 intermediari e negoziati nei comparti SeDeX ed EuroTLX di Borsa Italiana tra il 2020 e il 2025. Il framework proposto genera oltre 373'000 confronti giornalieri tra valore teorico stimato e prezzo di mercato, consentendo di quantificare i costi impliciti sia in fase di emissione sia nelle successive fasi di negoziazione nel mercato secondario. Il markup medio all'emissione si attesta al 6,02%, in linea con i mercati nord-europei ma superiore alle evidenze disponibili per il mercato tedesco. L'analisi rivela una marcata eterogeneità nelle politiche di pricing tra emittenti, con una dispersione superiore ai cinque punti percentuali, persistente anche a parità di struttura e profilo di rischio. La Life Cycle Hypothesis risulta confermata per la maggioranza degli emittenti, con una compressione dei costi impliciti concentrata nella seconda metà del ciclo di vita del prodotto. Il confronto tra certificati Maxi Cedola e Cash Collect evidenzia l'assenza di un sovrapprezzo all'emissione per i prodotti funzionali a soddisfare particolari esigenze fiscali degli investitori contrariamente a quanto documentato per il mercato tedesco, ma mostra una significativa contrazione del markup nelle fasi immediatamente successive all'erogazione della maxi cedola iniziale, fornendo possibili argomentazioni in merito alla Order Flow Hypothesis. L'analisi econometrica delle determinanti individua nel rischio dello strumento, nella volatilità, nella capitalizzazione e nel dividend yield dei sottostanti i principali fattori esplicativi del markup nel mercato secondario. L'elaborato propone inoltre una misura di rischio time-varying, aggiornata quotidianamente sulla base degli scenari simulati, alternativa all'indicatore sintetico di rischio previsto dalla normativa PRIIPs. L'analisi di portfolio sorting evidenzia infine come il markup rilevato risulti predittivo dei rendimenti futuri risk-adjusted: i portafogli costruiti selezionando certificati a basso markup sovraperformano sistematicamente quelli ad alto markup.

Keywords: Investment Certificates, simulazione Monte Carlo, Costi impliciti, Rischio di Mercato, Pricing derivati.

Indice

Introduzione.....	7
Capitolo 1. Gli investment certificates.....	9
1.1. I criteri di classificazione dei certificates.....	10
1.1.1. La classificazione dei certificati di investimento.....	11
1.1.1.1. I Prodotti a capitale protetto.....	12
1.1.1.2. I Prodotti a capitale condizionatamente protetto.....	13
1.1.1.3. I Prodotti a capitale non Protetto.....	15
1.2. I certificati di investimento: per quale motivo il tema è rilevante?	21
1.2.1. I dati del mercato italiano.....	21
1.2.2. Il trattamento fiscale dei certificates.....	25
1.2.3. Rischio e complessità: perché i due temi non sempre sono legati.....	26
1.2.4. Il mercato italiano dei certificates: un tema trascurato nella letteratura accademica.....	27
1.3. Le principali questioni aperte in merito ai Certificati di investimento	29
1.3.1. La valutazione dei certificates: il markup tra prezzo teorico e “prezzo di borsa”.....	30
1.3.2. La scelta dei sottostanti da parte dell'emittente: l'impatto del dividend yield.....	31
1.3.3. Il Rischio di Credito: dal bail-in al caso Smart ETN.....	32
1.4. Literature review	33
1.5. L'obiettivo della tesi	35
Capitolo 2. Aspetti Metodologici.....	37
2.1. Dati e highlights dell'analisi.....	37
2.2. Il modello di pricing – Overview	38
2.2.1. Sintesi delle principali fasi del processo di Pricing.....	40
2.3. Il modello di Pricing: approfondimento sulle scelte modellistiche.....	45
2.3.1. La volatilità.....	46
2.3.2. La struttura di correlazioni e la matrice di covarianza.....	49
2.3.3. L'introduzione di “Jumps” nei prezzi.....	52
2.3.4. L'introduzione di “Jumps” nella volatilità degli asset.....	55
2.4. Le innovazioni stocastiche nel processo della volatilità: il leverage effect	59
2.5. Derivazione della misura di rischio Time-varying	60
2.5.1. Determinazione dei rendimenti attesi.....	61
2.5.2. Rischio di mercato: la proposta di una misura time-varying.....	63
2.5.3. Identificazione delle soglie di rischio.....	63
Capitolo 3. Applicazione empirica	71
3.1. Le caratteristiche del Certificato NLBNPIT1UX66.....	71
3.2. La Stima della volatilità.....	72
3.2.1. La Stima dei parametri alla base del processo mean reverting.....	73

3.3. La simulazione dei Jumps	74
3.3.1. I jumps della volatilità	74
3.3.2. I jumps di prezzo	76
3.3.3. Analisi della co-occorrenza tra gli shock.....	78
3.4. Stima del leverage effect	79
3.5. Simulazione della dinamica stocastica della volatilità	80
3.6. Modellizzazione e simulazione della struttura di dipendenza multivariata.....	81
3.7. Simulazione Monte Carlo delle traiettorie dei sottostanti	82
3.7.1. Ricostruzione dei flussi di cassa	85
3.7.2. Markup e misura sintetica di rischio	86
3.7.3. Precisione nella stima	89
<i>Capitolo 4. Analisi empirica del mercato italiano</i>	<i>93</i>
4.1. Analisi del Markup all'emissione	94
4.2. Analisi del Markup lungo il ciclo di vita del prodotto.....	101
4.3. Comparazione Certificati Maxi Cedola e Cash Collect.....	107
4.4. Analisi delle determinanti del Markup	109
4.5. Relazione tra Markup e rendimento atteso	119
4.6 Possibili limiti metodologici	128
4.7 Possibili sviluppi della ricerca.....	129
<i>Conclusioni</i>	<i>131</i>
<i>Bibliografia</i>	<i>135</i>
<i>Sitografia.....</i>	<i>141</i>

Introduzione

I certificati di investimento rappresentano strumenti finanziari strutturati caratterizzati da un payoff dipendente dall'andamento di una o più attività sottostanti. Emessi da intermediari finanziari, combinano componenti obbligazionarie e opzionali, consentendo la costruzione di prodotti con profili rischio-rendimento altamente eterogenei e, in molti casi, con garanzie totali o parziali sul capitale a scadenza. La struttura di tali strumenti li rende particolarmente adatti a soddisfare le esigenze di una platea eterogenea di investitori, offrendo la possibilità di implementare strategie di investimento con caratteristiche tipicamente associate agli strumenti utilizzati dagli investitori istituzionali. Nonostante questo, la loro complessità richiede competenze specifiche per la valutazione della relazione rischio-rendimento e per la selezione di strumenti coerenti con gli obiettivi e la struttura del portafoglio dell'investitore. La crescita nella diffusione di questo genere di prodotto rappresenta una delle manifestazioni più evidenti del più ampio e strutturale fenomeno definito in letteratura come *retailization*, comunemente inteso come la progressiva estensione alla clientela retail di strumenti e strategie di investimento tradizionalmente riservati agli investitori istituzionali. Nel caso dei certificates, tale processo ha assunto caratteristiche particolarmente rilevanti nel mercato italiano, che rappresenta attualmente il principale mercato europeo per volumi di scambio. La combinazione di tassi di interesse storicamente bassi, dell'elevata propensione al risparmio delle famiglie e della crescente sofisticazione dell'offerta da parte degli intermediari ha infatti favorito un'ampia diffusione di questi strumenti, estendendone l'utilizzo anche alla clientela retail. I certificates rappresentano una quota crescente della ricchezza dei risparmiatori italiani: a fine 2024 l'ammontare dei certificati in circolazione in Italia è risultato essere prossimo agli 85 miliardi di euro¹. Il 65% di questo ammontare è detenuto da famiglie italiane tanto da rappresentare il secondo titolo di debito per ammontare detenuto tra gli investitori retail dopo le obbligazioni governative.

La combinazione tra complessità strutturale e prevalente base retail che caratterizza questi strumenti ha alimentato un ampio filone di ricerca empirica volto a comprendere l'entità dei costi impliciti in tali strumenti, documentando con una certa uniformità l'esistenza di un divario sistematico tra il prezzo di collocamento dei certificates e il loro valore teorico. Tale differenza rappresenta una componente di costo implicita, difficilmente osservabile dalla clientela retail in assenza di sofisticati modelli di pricing e raramente pienamente desumibile dalla documentazione informativa messa a disposizione dagli emittenti.

Nonostante la rilevanza del mercato italiano, i contributi empirici dedicati al contesto domestico risultano ancora limitati e, per quanto a mia conoscenza, non sono disponibili studi che abbiano

¹ BANCA D'ITALIA, *Rapporto sulla stabilità finanziaria*, n. 1. Aprile, Roma, 2025

condotto analisi su un campione di dimensioni comparabili. Il presente elaborato, dopo aver presentato un framework per la valutazione degli investment certificates basato sul metodo Monte Carlo, si propone di colmare tale lacuna concentrandosi sull'analisi del markup implicito, sia nella fase di emissione sia nelle successive fasi di negoziazione sul mercato secondario, su un perimetro di 1235 certificates emessi da 12 intermediari attivi nel mercato italiano, sfruttando una base dati composta da oltre 373'000 rilevazioni giornaliere del differenziale tra prezzi di mercato e valori teorici stimati tramite il framework proposto. Dopo aver introdotto, nel primo capitolo, il mercato degli investment certificates, la letteratura di riferimento e il quadro regolamentare entro cui questi strumenti si collocano, il Capitolo 2 sviluppa il framework metodologico alla base dell'analisi empirica. Viene presentato il modello di pricing Monte Carlo adottato, descrivendo le principali scelte implementative relative alla modellazione della volatilità, alla struttura di correlazione multivariata e all'introduzione di jumps nei prezzi e nella volatilità dei processi stocastici alla base dei diversi sottostanti. Il capitolo introduce inoltre una nuova misura di rischio *time-varying*, proposta al fine di superare la natura statica degli indicatori previsti dalla normativa PRIIPs. A differenza degli strumenti per cui tale framework è stato originariamente concepito, i certificates presentano un profilo di rischio che varia significativamente nel corso del ciclo di vita, in funzione dell'andamento dei sottostanti e della loro distanza dai livelli critici che determinano discontinuità nel payoff rendendo poco giustificabile il ricorso a indicatori calcolati esclusivamente al momento dell'emissione. La misura di sintesi proposta, aggiornata quotidianamente sulla base degli scenari simulati, si pone l'obiettivo di monitorare nel continuo l'evoluzione del profilo di rischio dello strumento e di fornire all'investitore un'informazione maggiormente rappresentativa del rischio del certificato. Gli elementi teorici presentati nel Capitolo 2 sono successivamente oggetto di un'applicazione empirica illustrata nel Capitolo 3, condotta in riferimento al certificato "Low Barrier Cash Collect" NLBNPIT1UX66 emesso da BNP Paribas. Il quarto e conclusivo capitolo presenta le risultanze dell'analisi empirica, volta a esaminare sistematicamente l'entità del markup all'emissione, la sua dinamica lungo il ciclo di vita dei prodotti e i fattori econometrici che ne spiegano la variabilità tra emittenti e strutture.

L'elaborato si conclude analizzando il potere predittivo del markup sui rendimenti futuri risk-adjusted, valutando l'esistenza di una relazione sistematica tra livello dei costi impliciti e performance attese dell'investitore.

Capitolo 1. Gli investment certificates

I certificati di investimento sono strumenti finanziari derivati cartolarizzati, negoziati in mercati regolamentati che replicano l'andamento di una o più attività sottostanti. Si tratta di uno strumento di debito emesso da intermediari finanziari che incorpora una combinazione di strumenti derivati e componenti obbligazionarie, che consentono la strutturazione di prodotti di investimento caratterizzati da profili di payoff variegati offrendo in molti casi garanzie totali o parziali sul capitale a scadenza.

Questa definizione mette in luce non solo la complessità di questi prodotti ma, potenzialmente, anche la caratteristica di saper accogliere le esigenze di una classe straordinariamente eterogenea di investitori. Per costoro, la comprensione ed il corretto utilizzo di tali strumenti in un'ottica di portafoglio, rappresenta sia una sfida che una opportunità: da un lato, gli *investment certificates* offrono infatti la possibilità di implementare strategie di investimento altrimenti accessibili solo agli investitori professionali, dall'altro, la loro complessità richiede competenze specifiche e la capacità di saper condurre valutazioni accurate in merito alla relazione rischio-rendimento oltre alla capacità di identificare i prodotti coerenti con il proprio portafoglio a supporto degli obiettivi finanziari individuali. I *Certificates* rappresentano una quota crescente della ricchezza dei risparmiatori italiani: a fine 2024 l'ammontare dei certificati in circolazione in Italia è risultato essere prossimo agli 85 miliardi di euro². Il 65% di questo ammontare è detenuto da famiglie italiane tanto da rappresentare il titolo di debito più rappresentativo tra gli investitori retail dopo le obbligazioni governative.

La crescente diffusione di questi strumenti risulta essere indubbia così come l'attenzione posta sul tema dalle diverse autorità di regolamentazione e di vigilanza. Da questo punto di vista, determinanti risultano essere le direttive "*Markets in Financial Instruments Directive*" nella loro prima versione (Mifid I, 2004/39/CE) e nella successiva riforma (Mifid II, 2014/65/UE) che hanno introdotto delle misure volte a garantire una maggiore trasparenza dei mercati finanziari prevedendo una maggior armonizzazione delle informazioni fornite agli investitori favorendo così una maggiore comparabilità dei diversi strumenti. Lo stesso obiettivo è fondante anche in riferimento al Regolamento PRIIPs (1286/2014/UE) che ha reso obbligatorio, per gli emittenti di strumenti finanziari strutturati, la predisposizione del "*Key Information Document*" (KID). Tale documentazione, che presenta una struttura appositamente standardizzata, deve contenere informazioni utili a questo scopo quali:

- **Indicatore Sintetico di Rischio** (SRI, Syntetic Risk Indicator)

Propone una misura di sintesi del rischio dello strumento in una scala discreta da 1 (livello di rischio minimo) a 7 (livello di rischio massimo) mettendo in relazione il rischio di credito dell'emittente ed il rischio di mercato dello strumento finanziario stesso.

² BANCA D'ITALIA, *Rapporto sulla stabilità finanziaria*, n. 1. Aprile, Roma, 2025

- **Indicatore sintetico di costo**

Propone una vista complessiva dell'impatto delle diverse tipologie di costo a cui è sottoposto l'investitore lungo l'intero ciclo di vita del prodotto finanziario.

- **Scenari di performance**

Vengono proposti una serie di possibili rendimenti del prodotto in riferimento a quattro differenti scenari (scenario di stress, sfavorevole, moderato e favorevole) e di tre differenti orizzonti temporali. Per ciascun scenario, viene definito un percentile rappresentativo necessario per classificare i rendimenti storici del prodotto.

Seppur gli obiettivi fondanti di questo impianto regolamentare risultino senz'altro condivisibili e gli indicatori di sintesi identificati si prestino, idealmente, a offrire una buona vista in merito alle dinamiche rappresentate, risulta molto complesso includere nello stesso framework quantitativo strumenti tanto eterogenei come possono essere i certificati di investimento. Il quadro regolamentare proposto risulta infatti essere virtuoso in riferimento ai più tradizionali e conosciuti prodotti di investimento a lungo termine (ETF, ETC, fondi d'investimento, prodotti d'investimento assicurativi) ma risulta essere di difficile razionalizzazione nel contesto degli investment certificates. Questi ultimi, infatti, oltre ad essere caratterizzati da scadenze predeterminate particolarmente variegata, sono caratterizzati da un profilo di rischio altamente variabile nel corso del ciclo di vita del prodotto sia in funzione del tempo a scadenza così come dell'andamento dei differenti sottostanti e alla loro probabilità di raggiungimento di alcuni livelli "critici" che determinano discontinuità del payoff. Alla luce di questo, risulta particolarmente limitante prevedere che questi indicatori di sintesi vengano calcolati e comunicati esclusivamente al momento dell'emissione facendo sì che le stesse caratteristiche vengano ereditate per tutta la vita del prodotto. Anche in riferimento ai costi dichiarati, sembrano essere evidenti delle discordanze tra quanto comunicato dai diversi emittenti in termini di costi e quanto emerge successivamente alla fase di pricing degli stessi.

È proprio in questo contesto di crescente interesse e manifesta complessità che si inserisce il presente lavoro, il quale si propone, attraverso un approccio sistematico che coniuga teoria finanziaria ed applicazione pratica, di suggerire un framework completo per la valutazione degli investment certificates proponendo inoltre un nuovo indicatore di rischio dinamico in grado di catturare le variazioni time-varying del profilo di rischio dei diversi strumenti.

1.1. I criteri di classificazione dei certificates

La combinazione di componenti opzionarie e obbligazionarie alla base dei certificati di investimento consente la strutturazione di profili di payoff estremamente diversificati, dando luogo a una asset class

in costante evoluzione e caratterizzata da un'elevata eterogeneità. Tale varietà strutturale rende necessario il ricorso a un sistema di classificazione condiviso, in grado di ricondurre le diverse tipologie di prodotto a un quadro organico al fine di facilitarne la comprensione e il confronto. Proprio in questa prospettiva si colloca la mappatura proposta dall'ACEPI (*Associazione Italiana Certificati e Prodotti di Investimento*), un ente nato con lo scopo di promuovere una cultura evoluta dei prodotti di investimento e di rappresentare i diversi emittenti tutelando i loro diversi interessi nei confronti delle Autorità di Mercato e delle Istituzioni di Vigilanza. ACEPI è anche membro dell'EUSIPA (*European Structured Investment Product Association*) un'associazione che rappresenta a livello europeo gli emittenti ed i distributori di prodotti strutturati ponendo al contempo a fattor comune le esperienze maturate delle diverse associazioni nazionali. Anche EUSIPA propone un framework proprio per la classificazione di questi prodotti con anche l'obiettivo di favorire un allineamento metodologico e terminologico tra i diversi paesi.

I certificati possono essere classificati in tre grandi macrogruppi ben distinti per profilo di rischio, obiettivi perseguiti ed orizzonte temporale:

- **Certificati a leva:** si tratta di prodotti che amplificano i guadagni e le perdite dei sottostanti sfruttando l'effetto leva. In questa categoria rientrano i CW, i certificati a leva fissa ed i certificati a leva variabile (come, ad esempio, i certificati "Turbo"³ ed i cd. Mini futures⁴)
- **Credit linked notes:** si tratta di un prodotto che ha come sottostante una o più obbligazioni e che prevede un profilo di rendimento in linea a quello degli stessi sottostanti. Il rimborso del capitale ed il pagamento delle cedole dipendono dal verificarsi o meno di determinati eventi di credito stabiliti contrattualmente (e.g. default dell'emittente, ristrutturazione del debito...)
- **Certificati d'investimento:** si tratta di una classe particolarmente eterogenea di strumenti finanziari derivati che consentono di investire su uno o più sottostanti generalmente in un'ottica di medio termine mediante delle differenti strutture che possono prevedere l'erogazione di cedole intermedie condizionate o la protezione del capitale investito.

1.1.1. La classificazione dei certificati di investimento

Il presente elaborato si concentra in maniera esclusiva su quest'ultima categoria di prodotti di cui viene offerta un'ulteriore classificazione in linea con quanto proposto dalla Mappa dei certificati pubblicata dall'ACEPI.

³ Strumenti finanziari che consentono di esporsi sia al rialzo che al ribasso del titolo o indice sottostante. Sono caratterizzati da una barriera di knock-out che, se oltrepassata, determina l'azzeramento del valore del prodotto. Si tratta di uno strumento ad alta leva e la stessa varia dinamicamente in funzione della distanza tra il livello del sottostante e quello di knock-out.

⁴ Strumenti finanziari simili ai *Turbo Certificates*. Sono però caratterizzati da un livello di Strike distinto dal livello di knock-out facendo sì che, nel caso in cui si dovesse verificare un evento barriera, questo non comporti l'azzeramento del valore del prodotto.

Gli investment certificates si possono distinguere nelle seguenti categorie:

- **Prodotti a capitale protetto:** si tratta di certificati di investimento che garantiscono alla scadenza il rimborso del valore nominale indipendentemente dall'andamento del prezzo dei sottostanti prevedendo, in alcuni casi, una parziale partecipazione ad un eventuale rialzo delle quotazioni degli stessi.
- **Prodotti a capitale condizionatamente protetto:** si tratta di certificati di investimento che garantiscono il rimborso del valore nominale solo a condizione che non si siano verificati "eventi barriera" previsti contrattualmente. La protezione del capitale è quindi generalmente garantita fino ad un livello predeterminato di ribasso dei sottostanti. Nel caso in cui le perdite eccedano tale soglia, l'investitore riceverà un flusso di cassa che sarà determinato dalla performance dei sottostanti stessi.
- **Prodotti a capitale non protetto:** Si tratta di prodotti di investimento che non incorporano alcuna garanzia di ricevere alla scadenza un rimborso predeterminato.

1.1.1.1. I Prodotti a capitale protetto

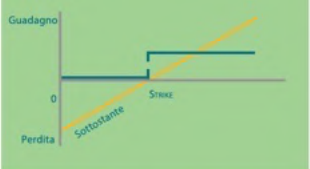
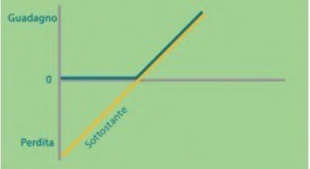
Per via della loro struttura particolarmente conservativa, i prodotti a capitale protetto consentono all'investitore di poter individuare ex-ante la massima perdita potenziale e, qualora il prodotto venga negoziato nel mercato secondario ad un prezzo inferiore rispetto al suo valore nominale, eliminano la possibilità di registrare delle perdite alla scadenza del contratto rappresentando così degli strumenti caratterizzati da un profilo di rischio particolarmente contenuto. Nonostante questo, si ricorda che, come per tutti gli strumenti di debito, il rimborso del capitale a scadenza è subordinato alla solvibilità dell'emittente.

I prodotti a capitale protetto, secondo la classificazione proposta da ACEPI, si suddividono a loro volta in tre categorie distinte:

- **I Certificates digitali:** rappresentano la struttura di payoff più basilare caratterizzata da un rimborso del capitale a scadenza di tipo binario. Viene pertanto identificato un solo livello di barriera e, qualora il sottostante a scadenza si trovi al di sopra di questo livello, viene riconosciuto all'investitore l'importo massimo previsto contrattualmente. Nel caso contrario, il rimborso si limita al valore nominale.
- Simili ai certificati digitali risultano essere gli **Equity Protection Certificates:** questa struttura non prevede un importo massimo di rimborso ma consente di partecipare linearmente ai rialzi del sottostante pur preservando la protezione del capitale a scadenza.
- I Certificati di tipo **Express Protection** sono invece caratterizzati dalla loro scadenza anticipata che si verifica qualora, ad una delle date di valutazione, il prezzo del sottostante risulti essere superiore a delle soglie definite. In questa casistica, l'investitore ha diritto a ricevere il rimborso

del valore nominale maggiorato di un premio che può essere variabile e guidato dalla data in cui si verificano le condizioni di *Autocall*.

Figura 1.1 – Rappresentazione del payoff dei Certificati a Capitale Protetto

	Certificates Digitali	Equity Protection Certificates	Express Protection Certificates
Sottostanti	Azioni*, indici*, commodities*, valute*, fondi*.	Azioni*, indici*, commodities*, valute*, fondi*, ETF*.	Azioni*, indici*, commodities*, valute*, fondi*, ETF*.
Tipologia di basket	Worst of, best of, rainbow.	Worst of, best of, rainbow.	Worst of, best of, rainbow.
Varianti	Long, short, cap, autocallability, barriera europea.	Long, short, cap, autocallability.	Long, short, cap, barriera europea, long.
Obiettivo dell'investimento	Ottenere premi periodici in caso di moderato rialzo del sottostante.	Possibilità di ottenere rendimenti positivi in caso di rialzo del sottostante con la protezione del capitale investito.	Ottenere rendimenti positivi in caso di stabilità, moderato rialzo o moderato ribasso del mercato, con protezione del capitale.
Scenario	Rialzo moderato del sottostante.	Rialzo del sottostante con protezione del capitale.	Rialzo, stabilità o moderato ribasso
Caratteristiche principali	Premio periodico se il sottostante, alle date di rilevazione fissate, risulta superiore al livello iniziale. Rendimento soggetto ad un limite massimo prestabilito. 	Partecipazione al rialzo del sottostante. 	Rimborso anticipato con pagamento di un ammontare prefissato se, in una delle date di rilevazione, il sottostante è superiore ad un livello prefissato. Recupero dell'ammontare eventualmente non pagato alle successive date di rilevazione. Rendimento soggetto a un limite massimo prestabilito. 

Fonte: ACEPI – Mappa dei Certificati

1.1.1.2. I Prodotti a capitale condizionatamente protetto

I prodotti a capitale condizionatamente protetto, al contrario dei prodotti a capitale protetto, sono caratterizzati dalla protezione del capitale a scadenza che, al contrario di quanto visto in riferimento ai prodotti a capitale protetto, risulta essere condizionata al rispetto di soglie di barriera predeterminate che, se violate, comportano l'inefficacia del meccanismo di protezione esponendo l'investitore ad una perdita che risulta direttamente proporzionale all'entità dei ribassi del sottostante. Tale barriera, può essere di due tipologie distinte:

- **Barriera discreta** (o europea) nel caso in cui la barriera viene osservata esclusivamente alla data di scadenza dello strumento. Eventuali discese del valore del sottostante al di sotto di tale soglia durante la vita del certificato non compromettono il meccanismo di protezione del capitale.
- **Barriera continua** (o americana) nel caso in cui la barriera viene osservata costantemente durante tutta la vita del certificato. Un'eventuale discesa del sottostante al di sotto di tale livello (che può essere valutato intraday o alla chiusura della giornata di negoziazione sulla base di quanto stabilito contrattualmente) compromette definitivamente il meccanismo di protezione.

Questa categoria di prodotti, sono a loro volta classificabili in sei differenti strutture di payoff:

- I **Certificati Cash Collect**, fanno riferimento ad una struttura particolarmente diffusa caratterizzata dal rimborso del valore nominale del certificato che viene riconosciuto

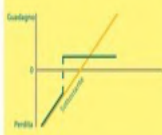
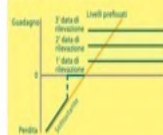
all'investitore nel caso in cui non si sia verificato un evento barriera. In caso di violazione della barriera, il valore di rimborso risulterà direttamente proporzionale alla performance del sottostante esponendo così l'investitore a perdite anche significative del capitale investito. A questo genere di struttura vengono spesso previste contrattualmente una serie di cedole intermedie (condizionate o incondizionate) che vengono riconosciute all'investitore lungo l'intera vita del prodotto. A tale strumento finanziario viene spesso associata la clausola di *Autocall* che garantisce all'emittente la facoltà di rimborsare anticipatamente il contratto nel caso in cui i sottostanti abbiano violato al rialzo determinati livelli rendendo così incerta la durata dell'investimento. Il livello di Autocall può essere fisso (solitamente al 100% del valore del sottostante alla *settlement date*) oppure decrescente ad intervalli regolari aumentando così la probabilità che il prodotto venga richiamato prima della sua scadenza naturale. La struttura dei certificati Cash Collect risulta particolarmente assimilabile a quella dei **Bonus Certificates con cap**. In quest'ultima tipologia, infatti, se non si verifica un evento barriera, oltre al rimborso del valore nominale del contratto l'investitore beneficia a scadenza anche di un importo aggiuntivo (bonus) che tendenzialmente sostituisce l'erogazione delle cedole intermedie

- **Gli Express Certificates** rappresentano una struttura caratterizzata dalla presenza di meccanismi di Autocall che garantiscono all'emittente la facoltà di estinguere anticipatamente il contratto al realizzarsi di particolari rialzi della quotazione dei sottostanti garantendo al contempo all'investitore l'erogazione di flussi aggiuntivi. Si differenziano dai certificati *Express Protection* in quanto non sono dotati del meccanismo di protezione.
- **I certificati Outperformance a capitale condizionatamente protetto** rappresentano una struttura che permette di partecipare ai rialzi della quotazione del sottostante mediante un effetto leva che consente di amplificare i guadagni secondo un *fattore di partecipazione* predeterminato e costante garantendo inoltre la protezione del capitale investito nel caso in cui non si dovesse verificare alcun evento barriera.
- **I Twin Win Certificates** rappresentano una particolare struttura che consente di partecipare linearmente e con un fattore di partecipazione pari al 100% sia all'apprezzamento del sottostante così come di beneficiare di un eventuale ribasso dello stesso fino al livello di barriera. Anche in questo caso, come per tutti i certificati a capitale condizionatamente protetto, il raggiungimento del livello di barriera rappresenta un punto di discontinuità oltre al quale l'investitore si vedrà costretto a sostenere delle perdite proporzionali al ribasso del sottostante di riferimento.
- Gli **Airbag Certificates**, al contrario, presentano una struttura peculiare che permette partecipare linearmente all'eventuale rialzo del sottostante prevedendo inoltre una protezione aggiuntiva sul capitale investito. In questo caso, al realizzarsi di un evento barriera, l'investitore non subirà una perdita proporzionale alla performance negativa del sottostante rispetto al prezzo *Strike* (il valore del sottostante rilevato nel giorno di fixing iniziale) ma solamente rispetto

al livello di barriera che, per costruzione, risulta essere inferiore attenuando così le eventuali perdite. Questo garantisce allo strumento un profilo di payoff privo della discontinuità che caratterizza tutte le altre strutture dei certificati a capitale condizionatamente protetto in prossimità del livello di barriera.

- I **Bonus Certificates** sono infine caratterizzati da una struttura del tutto assimilabile a quella dei certificati Cash Collect e dei Bonus certificates con Cap ad eccezione del fatto che non è previsto un ammontare massimo di rimborso ma il payoff riconosciuto all'investitore alla scadenza del contratto in caso di rialzi del sottostante dipenderà dalla performance del sottostante stesso.

Figura 1.2 – Rappresentazione del payoff dei Certificati a Capitale Condizionatamente Protetto

	Cash Collect Certificates	Express Certificates	Outperformance Condiz.te Protetto	Twin Win Certificates	Airbag Certificates	Bonus Certificates
Sottostanti	Azioni*, indici*, commodities*, valute*, fondi*, ETP*	Azioni*, indici*, commodities*, valute*, fondi*, ETP*	Azioni*, indici*, commodities*, valute*, fondi*, ETP*	Azioni*, indici*, commodities*, valute*, fondi*, ETP*	Azioni*, indici*, commodities*, valute*, fondi*, ETP*	Azioni*, indici*, commodities*, valute*, fondi*, ETP*
Tipologia di basket	Worst of, best of, rainbow.	Worst of, best of, rainbow.	Worst of, best of, rainbow.	Worst of, best of, rainbow.	Worst of, best of.	Worst of, best of, rainbow.
Varianti	Long, cap, autocallability, barriera europea.	Cap, autocallability, barriera europea o americana, long.	Cap, autocallability, barriera europea o americana.	Cap, autocallability, barriera europea o americana.	Cap, autocallability.	Long, short, cap, autocallability, barriera europea o americana.
Obiettivo dell'investimento	Ottenere profitti cedolari anche con ribassi limitati del sottostante.	Ottenere rendimenti positivi in caso di stabilità, moderato rialzo o moderato ribasso del mercato.	Ottenere un profitto positivo con effetto leva in caso di rialzo del sottostante e con parziale protezione del capitale.	Ottenere un rendimento positivo in caso di rialzo ma anche di moderato ribasso del sottostante.	Ottenere rendimenti positivi in caso di rialzo del sottostante con protezione condizionata del capitale.	Ottenere un rendimento positivo (il bonus) in caso di rialzo o moderato ribasso del sottostante.
Scenario	Rialzo, stabilità o moderato ribasso.	Rialzo, stabilità o moderato ribasso.	Rialzo o moderato ribasso del mercato.	Rialzo o moderato ribasso del mercato.	Rialzo o moderato ribasso del sottostante.	Rialzo, stabilità o moderato ribasso.
Caratteristiche principali	Possibilità di ottenere profitti cedolari periodici (premi) anche in caso di ribassi limitati del sottostante, purché il giorno di valutazione il sottostante quoti ad un livello almeno pari ad un livello predeterminato in fase di emissione. 	Rimborso anticipato con pagamento di un ammontare prefissato se, in una delle date di rilevazione, il sottostante è superiore ad un livello prefissato. Recupero dell'ammontare eventualmente non pagato alle successive date di rilevazione. Rendimento massimo prestabilito. 	Partecipazione al rialzo del sottostante con effetto leva. Partecipazione al ribasso del sottostante e quindi capitale a rischio se il sottostante scende al di sotto di un certo livello predeterminato. 	Partecipazione al rialzo e al ribasso del sottostante eventualmente con effetto leva. Possibilità di ottenere rendimenti positivi anche nel caso di ribasso del sottostante purché il sottostante non scenda al di sotto di un livello predeterminato. 	Partecipazione al rialzo del sottostante. Protezione condizionata del capitale con un fattore airbag che riduce la performance negativa che è calcolata a partire dal livello barriera. 	Premio (bonus) a scadenza per rialzo o per moderato ribasso a condizione che se il sottostante non scende al di sotto di un livello predeterminato (barriera) alla data di rilevazione. Partecipazione al rialzo del sottostante in caso di rialzo del sottostante oltre l'importo bonus. 

Fonte: ACEPI – Mappa dei Certificati

1.1.1.3. I Prodotti a capitale non Protetto

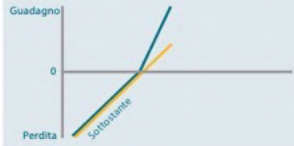
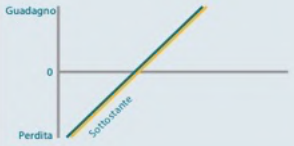
I certificati a capitale non protetto rappresentano la restante parte di prodotti che non sono caratterizzati da alcuna struttura in grado di limitare l'ammontare delle perdite nel caso in cui il sottostante dovesse registrare una performance negativa. Questa maggiore esposizione consente all'emittente di prevedere dei meccanismi di remunerazione più generosi caratterizzati da cedole o da fattori di partecipazione più elevati.

Questa classe di certificati si può distinguere prevalentemente in due strutture distinte:

- I **Certificati Outperformance** sono dei prodotti che offrono agli investitori una partecipazione ai rialzi amplificata dalla presenza di una leva costante che amplifica la performance dell'investitore qualora il sottostante abbia registrato dei ritorni positivi. Nel caso di un deprezzamento del sottostante, al contrario, segue linearmente e con un rapporto 1:1 l'andamento del sottostante stesso.

- I **Benchmark certificates** si caratterizzano in quanto permettono una replica lineare di un sottostante o indice di riferimento con un fattore di partecipazione del 100% costante per tutta la vita del prodotto. Come si avrà modo di evidenziare nel corso dell'elaborato, il principale vantaggio di questi prodotti è di natura fiscale in quanto la normativa italiana consente l'utilizzo di tali proventi a compensazione di minusvalenze pregresse realizzate con altri prodotti finanziari. Un ulteriore beneficio, qualora il sottostante sia denominato in una valuta straniera, è rappresentato dalla c.d. clausola *quanto* che offre all'investitore una totale protezione derivante dalla fluttuazione del tasso di cambio. Questa struttura risulta inoltre interessante per quegli investitori che desiderano beneficiare del ribasso del sottostante senza dover ricorrere al prestito titoli necessario per operare una vendita allo scoperto.

Figura 1.3 – Rappresentazione del payoff dei Certificati a Capitale non Protetto

	Outperformance Certificates	Benchmark Certificates
Sottostanti	Azioni*, indici*, commodities*, valute*, fondi* ETF*.	Azioni*, indici*, commodities*, valute*, fondi*, ETF*.
Tipologia di basket	Worst of, rainbow.	Nessuno.
Varianti	Cap, autocallability, barriera europea o americana.	Barriera europea o americana.
Obiettivo dell'investimento	Ottenere un profitto positivo con effetto leva in caso di rialzo del sottostante.	Ottenere un rendimento positivo in caso di rialzo del sottostante.
Scenario	Rialzo di mercato	
Caratteristiche principali	Partecipazione al rialzo del sottostante con effetto leva. Partecipazione al ribasso del sottostante e quindi capitale a rischio 	Replica dell'andamento del sottostante. 

Fonte: ACEPI – Mappa dei Certificati

Seppur si tratti questa di un'ottima classificazione in grado di mappare in modo chiaro e preciso i payoff a scadenza delle diverse strutture di certificati, è utile sottolineare che l'offerta di questo genere di prodotti risulta essere molto più ampia e variegata. I diversi emittenti attivi nel mercato italiano possono infatti prevedere caratteristiche contrattuali in grado di aggiungere elementi di condizionalità anche nel corso del ciclo di vita del contratto come, ad esempio, meccanismi di erogazione di **cedole periodiche condizionate** o la previsione di **clausole di Autocall**. Tali meccanismi comportano significative ripercussioni non solo sul profilo di rischio-rendimento tipico del prodotto ma anche sulla durata del contratto stesso che, in molti casi, non può per questo essere nota al momento dell'emissione o dell'acquisto sul mercato secondario ma può solo essere stimata su base probabilistica.

Risulta pertanto utile, in questa fase, passare in rassegna alcune delle caratteristiche più comuni dei prodotti di investimento strutturati:

- Con il termine **Autocall** ci si riferisce ad una caratteristica del prodotto strutturato secondo cui, lo stesso, può essere richiamato anticipatamente prima della sua *expiration date* al verificarsi di determinate condizioni. Questo richiamo anticipato si verifica generalmente se, ad una *valuation date* (generalmente coincidente con le date di osservazione per l'erogazione delle cedole) il sottostante si trova al di sopra di un livello prestabilito (livello di Autocall). Questa soglia può risultare fissa per tutta la durata del contratto (generalmente coincide con il prezzo di chiusura del sottostante nel giorno di emissione del certificato) oppure, in altri casi, risultare via via decrescente aumentando così la probabilità di rimborso anticipato. Questo genere di struttura è spesso definita *Step-down*. Nel corso degli ultimi anni, alcuni emittenti stanno collocando dei prodotti caratterizzati da una opzione call a favore degli emittenti stessi che permette un richiamo anticipato di tipo discrezionale e non subordinato al verificarsi di specifiche dinamiche di borsa dei sottostanti. Questa particolare opzione, la cui denominazione commerciale non è univoca tra i diversi emittenti, concorre ad aumentare l'opacità del corretto pricing della struttura stessa in quanto incorpora in tale processo alcuni elementi tipici della teoria dei giochi tali da considerare le diverse scelte strategiche dell'emittente. I prodotti che incorporano questa caratteristica di Autocall discrezionale risultano essere ad oggi marginali nel panorama dei prodotti strutturati italiani.
- La clausola “**memory**” fa riferimento ad una fattispecie piuttosto comune nell'ambito dei certificati che riconoscono all'investitore, lungo il ciclo di vita del contratto, il pagamento di cedole condizionate. In presenza di questa clausola, eventuali cedole non corrisposte, non risulteranno perse definitivamente ma verranno riconosciute all'investitore nel caso in cui, nelle date di valutazione successive, venga soddisfatta la condizione di pagamento.
- Il meccanismo **Airbag**, riscontrabile in alcune strutture di certificati a capitale condizionatamente protetto, offre una protezione aggiuntiva agli investitori che consente di attenuare l'impatto negativo nel caso di evento barriera. In questo caso, la perdita del sottostante rispetto al prezzo di Settlement viene **divisa per un fattore Airbag maggiore del 100%**, così da ridurne l'entità a carico dell'investitore.
- La clausola **Quanto**, che può essere prevista nel caso in cui i sottostanti siano denominati in valute diverse dall'Euro e permette agli investitori di proteggersi dal rischio di cambio. Il valore del certificato non risulta così influenzato dall'andamento del tasso di cambio.
- L'aumento del **numero di sottostanti** incrementa la complessità della struttura contrattuale e costituisce un ulteriore fattore di eterogeneità anche tra certificati formalmente riconducibili alla medesima tipologia di payoff. Nel frequente caso in cui un *certificate* comprende più sottostanti, per la determinazione delle differenti condizionalità tipiche dello strumento stesso, si fa riferimento al sottostante che, rispetto alla data di osservazione iniziale, è caratterizzato

dalla peggior performance. Si parla in questi casi di **clausola Worst-off**⁵. L'inclusione di un maggior numero di sottostanti (fino ad un massimo di quattro) concorre ad aumentare il profilo di rischio del certificato in quanto le probabilità di osservare una performance negativa di almeno uno di questi aumenta significativamente. In ragione di questo, i certificati caratterizzati da un maggior numero di sottostanti, ancor più se volatili, sono caratterizzati da flussi di cassa più remunerativi.

- I certificati “**reverse**”, al contrario, consentono all’investitore di esporsi a favore del ribasso dei sottostanti. Seppur vengano negoziate differenti strutture ideate a tale fine, la più comune risulta essere il c.d. Reverse Bonus Cap che, mediante il suo meccanismo tipico dei certificati a capitale condizionatamente protetto, garantisce all’investitore un payoff fisso qualora non si sia verificato un evento barriera (il cui trigger, in questo caso, si verifica qualora il sottostante raggiunga un valore superiore rispetto al livello di barriera). Al verificarsi dell’evento barriera, al contrario, l’investitore subirà delle perdite proporzionali al rialzo del sottostante.

La combinazione di queste strutture di payoff e queste clausole fa sì che i diversi emittenti abbiano la possibilità di emettere strumenti di investimento particolarmente eterogenei caratterizzati, tra l’altro, da nomenclature commerciali talvolta non standardizzate che rendono ancora meno agevole il confronto dei diversi certificates. Al fine di armonizzare le strutture proposte dai diversi intermediari finanziari, ACEPI ha proposto una mappatura propria che, anche mediante la riconduzione con il framework EUSIPA, permette di facilitare la corrispondenza tra la denominazione con la quale vengono emessi i certificati di investimento e la loro struttura.

⁵ Seppur si tratti di un aspetto tecnicamente previsto e mappato nel framework ACEPI, ad oggi non risultano negoziati nel mercato italiano certificati che comprendono la clausola “Best-off”.

Figura 1.4 – I nomi commerciali previsti dai diversi emittenti in riferimento ai certificati a Capitale Protetto e Capitale non Protetto

STRUMENTI A CAPITALE PROTETTO				STRUMENTI A CAPITALE NON PROTETTO			
Nome	Tipologia	EUSIPA	Emittenti	Nome	Tipologia	EUSIPA	Emittenti
Bonus Protected	Bonus Protected	1199 Miscellaneous Cap. Pr	Intesa Sanpaolo, Mediobanca	Benchmark/Tracker	Benchmark/Tracker	1300 Tracker Certificates	BNP Paribas, Intesa Sanpaolo, Leonteq, Mediobanca, Natixis, Société Générale, UniCredit, Vontobel
Cash Collect Lock-In Protect	Digitale		UniCredit				
Cash Collect Protetto	Digitale		Barclays, Intesa Sanpaolo, Natixis, Mediobanca, Société Générale, UniCredit	Benchmark Open End	Benchmark/Tracker		Leonteq, Société Générale, UniCredit, Vontobel
Cash Collect Protetto Consolidamento	Digitale		UniCredit	Flex Invest	Benchmark/Tracker		UniCredit
Cash Collect Protetto Memoria	Digitale		Barclays, UniCredit	Reflex	Benchmark/Tracker		Intesa Sanpaolo
Digital	Digitale		Barclays, BPER, Intesa Sanpaolo, UniCredit	Strategic	Benchmark/Tracker		Vontobel
Digital Protection	Digitale		Barclays, Banco BPM	Discount	Discount	1200 Discount Certificates	Barclays, BNP Paribas, Leonteq, Mediobanca, Société Générale, UniCredit
Equity Protection con Cedola	Digitale		Banco BPM, Barclays, BPER, Intesa Sanpaolo, Natixis				
Floored Autocallable	Digitale		Leonteq	Jet	Outperformance	1310 Outperformance Certificates	BNP Paribas
Garant Performance Cash Collect	Digitale		UniCredit	Outperformance	Outperformance		Barclays, Intesa Sanpaolo, Leonteq, Mediobanca, Natixis
Protezione Premium	Digitale		Mediobanca	Outperformance Cap	Outperformance	1240 Capped Outperformance Certificates	Leonteq
Butterfly	Equity Protection	1199 Miscellaneous Capital Protection	Banco BPM, BNP Paribas, Intesa Sanpaolo, Natixis, Société Générale				
Capital Protection	Equity Protection	Gli equity protection senza cap sono classificati in: 1100 Uncapped Capital Protection	Barclays, Leonteq				
Equity Protection	Equity Protection		Banco BPM, Barclays, BNP Paribas, Intesa Sanpaolo, Leonteq, Mediobanca, Natixis, Société Générale, UniCredit				
Equity Protection Alpha	Equity Protection		Banco BPM				
Equity Protection Cap	Equity Protection		Banco BPM, Barclays, Intesa Sanpaolo, Leonteq, Mediobanca, Natixis, Société Générale				
Equity Protection Target Premium	Equity Protection		Gli equity protection con cap sono classificati in:				
Obiettivo Rendimento	Equity Protection		Intesa Sanpaolo				
Pac Certificate	Equity Protection		1120 Capped Capital Protected				
Premium Certificate	Equity Protection		BNP Paribas				
Protection	Equity Protection		BNP Paribas				
Protection con Cap	Equity Protection		UniCredit				
Protection Barrier	Equity Protection	Gli equity protection con coupon sono classificati in: 1140 Capital Protection with Coupon	BPER, UniCredit				
Protection Double Barrier	Equity Protection		Intesa Sanpaolo				
Shark Fin	Equity Protection		Intesa Sanpaolo				
Shark Note	Equity Protection		Barclays, Natixis				
Shark Rebate	Equity Protection		Barclays, Leonteq				
Short Protection con/senza cap	Equity Protection		Barclays, BNP Paribas, Intesa Sanpaolo, Société Générale				
Twin Win Protected	Equity Protection		Natixis, UniCredit				
Equity Protection Autocallable	Express Protection		Barclays, BNP Paribas, Natixis, Société Générale				
Express Protected	Express Protection		Barclays, BNP Paribas, Intesa Sanpaolo, Leonteq, Mediobanca, Natixis, Société Générale, UniCredit				
Jet Easy Express	Express Protection	1199 Miscellaneous Capital Protection	BNP Paribas				
Telescope Protection	Express Protection		UniCredit				

Fonte: ACEPI – Mappa dei Certificati

Figura 1.5 – I nomi commerciali previsti dai diversi emittenti in riferimento ai certificati a Capitale condizionatamente protetto

Nome	Tipologia	EUSIPA	Emittenti	Nome	Tipologia	EUSIPA	Emittenti
Accelerator	Airbag	1399 Miscellaneous	Intesa Sanpaolo	Athena Protection	Express		BNP Paribas
Equity Protection Airbag	Airbag	Participation	Banco BPM	Athena Relax	Express		BNP Paribas
Bonus	Bonus		Banco BPM, Intesa Sanpaolo, Leonteq, Mediobanca, Société Générale, UniCredit, Vontobel	Boosted Autocallable	Express		Leonteq
Bonus Autocallable	Bonus	1320 Bonus	Banco BPM, Intesa Sanpaolo, Mediobanca, Natixis	Cash Collect Autocallable	Express		BNP Paribas, Intesa Sanpaolo, Mediobanca, Natixis, Société Générale, UniCredit
Bonus Autocallable Plus	Bonus	Certificates	Intesa Sanpaolo	Cash Collect Autocallable Airbag	Express		UniCredit
Bonus Plus	Bonus		Intesa Sanpaolo, UniCredit	Cash Collect Autoc. Airbag memoria	Express		UniCredit
Double Bonus	Bonus		Intesa Sanpaolo	Cash Collect Autoc. con memoria	Express		UniCredit
Easy Transition	Bonus		BNP Paribas, Natixis	Cash Collect Autoc. con Maxi premio	Express		UniCredit
Reverse Bonus	Bonus		Banco BPM, Leonteq, Mediobanca, UniCredit	Cash Collect Boost	Express		Société Générale
Stock Bonus	Bonus		BNP Paribas, UniCredit	Cash Collect Express	Express		UniCredit, Vontobel
Bonus Cap	Bonus Cap		Banco BPM, Barclays, Intesa Sanpaolo, Leonteq, Mediobanca, Natixis, Société Générale, UniCredit	Cash Collect Protection Plus+	Express		Société Générale
Bonus Cap Barriera Continua EoD	Bonus Cap		Intesa Sanpaolo	Cedola Fissa Airbag Express	Express		Leonteq, Vontobel
Bonus Cap Doppia Barriera	Bonus Cap	1250 Cap Bonus	UniCredit	Cedola Fissa Express	Express		Leonteq, UniCredit, Vontobel
Easy Express	Bonus Cap	Certificates	BNP Paribas, Société Générale	Classic Autocallable	Express		Leonteq
Recovery Bonus Cap	Bonus Cap		Leonteq, Mediobanca, Natixis, Société Générale, UniCredit	Double Express	Express		Intesa Sanpaolo
Recovery Top Bonus	Bonus Cap		Société Générale, UniCredit	Equity Premium Autocallable	Express		Banco BPM
Reverse Bonus Cap	Bonus Cap		Banco BPM, BNP Paribas, Leonteq, Mediobanca, Natixis, Société Générale, UniCredit	Equity Premium Aut. Accel. Coupon	Express		Banco BPM
Top Bonus e Top B. Doppia Barriera	Bonus Cap		Intesa Sanpaolo				Intesa Sanpaolo, Leonteq, Mediobanca, Natixis, Société Générale, UniCredit
Barrier Reverse Convertible	Cash Collect		Leonteq, Natixis	Express	Express	1260 Express	Intesa Sanpaolo
Cash Collect	Cash Collect		Barclays, BNP Paribas, Intesa Sanpaolo, Leonteq, Mediobanca, Natixis, Société Générale, UniCredit	Express Coupon	Express	Certificates	BNP Paribas
Cash Collect Airbag	Cash Collect		UniCredit	Express Plus	Express		Leonteq
Cash Collect con Maxi Premio	Cash Collect		UniCredit	Express Premium	Express		Leonteq
Cash Collect Consolidamento/Lock	Cash Collect		UniCredit	Fixed Premium Athena	Express		Barclays
Cash Collect Doppia Cedola	Cash Collect		UniCredit	Flored Footer	Express		Leonteq
Digital	Cash Collect	1230 Barrier Reverse	Intesa Sanpaolo	High Strike Inverse Autocallable	Express		BNP Paribas, Natixis, UniCredit
Double Barrier Cash Collect	Cash Collect	Convertible	BNP Paribas	Inverse Classic Autocallable	Express		Vontobel
Easy Transition	Cash Collect		BNP Paribas, Natixis	Inverse Phoenix Autocallable	Express		UniCredit, Vontobel
Equity Premium	Cash Collect		Banco BPM	Issuer Callable	Express		Vontobel
Fixed Cash Collect	Cash Collect		Barclays, BNP Paribas, Leonteq, Natixis, Société Générale, UniCredit	Low Strike Autocallable	Express		Leonteq
Lock-in Certificate	Cash Collect		Leonteq, Mediobanca, Natixis	Maxi Cash Collect	Express		BNP Paribas, Natixis, UniCredit
Non Stop Cash Collect	Cash Collect		BNP Paribas	Memory Cash Collect	Express		BNP Paribas, UniCredit
Premium Cash Collect	Cash Collect		Intesa Sanpaolo	Memory Cash Collect Airbag Express	Express		Vontobel
Reverse Convertible con Airbag	Cash Collect		Leonteq	Memory Cash Collect Express	Express		UniCredit, Vontobel
Reverse Equity Premium	Cash Collect		Banco BPM	Memory Cash Collect Express Athena	Express		Vontobel
Softcallable	Cash Collect		Leonteq	Memory Maxi Cash Collect Express	Express		Vontobel
Switch to Protection	Cash Collect		BNP Paribas	Multichance Autocallable	Express		Leonteq
All Coupon Cash Collect Autocallable	Express		BNP Paribas, Natixis, UniCredit	Phoenix	Express		Barclays, BNP Paribas, Leonteq, Mediobanca, Natixis, Société Générale, UniCredit
Athena	Express		BNP Paribas, Leonteq, Mediobanca, Natixis, Société Générale	Phoenix Yeti	Express		Natixis
Athena Airbag	Express		BNP Paribas	Phoenix Safetybell	Express		BNP Paribas
Athena Bell e Athena Buffer	Express		BNP Paribas	Phoenix Snowball	Express		Mediobanca
Athena Change Memorizer	Express		BNP Paribas	Recovery Autocallable	Express		Leonteq
Athena Coupon Locker	Express	1260 Express	BNP Paribas	Reverse Autocall	Express		Mediobanca
Athena Daily Bell	Express	Certificates	BNP Paribas	Reverse Express	Express		Mediobanca
Athena Double / Chance / Win	Express		BNP Paribas	Reverse Memory Cash Collect	Express		BNP Paribas
Athena Double Relax / Express	Express		BNP Paribas	Reverse Phoenix	Express		Mediobanca, Natixis
Athena Fast Bonus / Plus	Express		BNP Paribas	Softcallable	Express		Leonteq
Athena Fixed Premium	Express		BNP Paribas	Step Down Cash Collect	Express		BNP Paribas, Natixis
Athena Floating Plus	Express		BNP Paribas	Target One Autocallable	Express		Leonteq
Athena Jet / Athena Jet con Cap	Express		BNP Paribas	Welcome Coupon Autocallable	Express		Leonteq
Athena Match Race	Express		BNP Paribas	Equity Premium con Strike	Outperfor. Cond. Prot.	1330 Outperformance	Banco BPM
Athena Plus	Express		BNP Paribas	Outperformance / Cap / Protected	Outperfor. Cond. Prot.	Bonus Certificates	Barclays, Leonteq, Mediobanca, Société Générale, UniCredit
Athena Premium Plus	Express		BNP Paribas				Barclays, Banco BPM, BNP Paribas, Intesa Sanpaolo, Leonteq, Mediobanca, Natixis, Société Générale, UniCredit
				Twin Win	Twin Win		Barclays, Banco BPM, BNP Paribas, Intesa Sanpaolo, Leonteq, Mediobanca, UniCredit
				Twin Win Autocallable	Twin Win	1340 Twin-Win	Barclays, Banco BPM, BNP Paribas, Intesa Sanpaolo, Leonteq, Mediobanca, UniCredit
				Twin Win Autocallable con Cap	Twin Win	Certificates	Banco BPM, UniCredit
				Twin Win con Cap	Twin Win		Barclays, Banco BPM, Leonteq, Mediobanca, Natixis, Société Générale, UniCredit

Fonte: ACEPI – Mappa dei Certificati

1.2. I certificati di investimento: per quale motivo il tema è rilevante?

Il principale motivo per cui i certificati di investimento rappresentano un tema di rilievo risiede nel peso che questa specifica asset class riveste nel portafoglio delle famiglie italiane.

Il già citato “*Rapporto sulla stabilità finanziaria*”, nella sua pubblicazione del mese di aprile 2025, non senza sottolineare il rischio che questi strumenti possono rappresentare per la stabilità finanziaria derivante dalla loro complessità⁶, ha posto l'accento sulla crescita dei volumi negoziati e sull'importanza che i certificates rivestono nei portafogli delle famiglie italiane il cui valore a conclusione dell'anno 2024 sempre in riferimento alla clientela retail, ha superato i 55 miliardi di euro.

Inoltre, secondo i dati pubblicati dall'EUSIPA⁷ il mercato italiano risulta essere il principale mercato continentale in termini di volumi negoziati oltre a quello caratterizzato dalla maggior crescita.

1.2.1. I dati del mercato italiano

Per mettere in luce questa dinamica è utile analizzare i principali dati del mercato primario e secondario italiano facendo riferimento ai dati pubblicati trimestralmente dall'Associazione Italiana Certificati e Prodotti d'Investimento (ACEPI) in riferimento ai propri associati⁸. Tali dati non includono i prodotti quotati nel mercato Vorvel⁹.

Mercato primario:

Prendendo in analisi i volumi di certificates emessi dai diversi emittenti e quotati nel mercato SeDeX e nel sistema multilaterale di negoziazione EuroTLX nel periodo compreso tra l'inizio del 2006 ed il secondo trimestre 2025, si osserva come questi siano passati da 2,8 miliardi di euro ad oltre i 27 miliardi registrando un tasso di crescita annua composta del 12,5% nell'intero periodo in esame. Come evidenziato dai dati presentati nella **Figura 1.7** la crescita è risultata essere generalmente costante nel lungo periodo mentre l'analisi delle dinamiche di più breve periodo evidenzia una chiara relazione tra questa metrica e lo scenario finanziario. In concomitanza con i principali periodi di crisi che hanno interessato i primari indici mondiali (crisi subprime del 2008, crisi del debito sovrano europeo 2010-2012 e pandemia COVID-19 nel 2020) si è registrata una contestuale contrazione nel volume dei prodotti strutturati emessi nei principali comparti di Borsa Italiana.

Come evidenziato nella **Figura 1.8** questa dinamica è guidata prevalentemente dal numero delle nuove emissioni in quanto, il volume medio emesso in riferimento ai singoli prodotti emessi risulta generalmente stabile ad un valore prossimo a 15 milioni di euro con la sola eccezione del quadriennio

⁶ BANCA D'ITALIA, Il potere di intervento della Banca d'Italia su strumenti finanziari, depositi strutturati e attività/pratiche finanziarie collegate: quadro giuridico, analitico e metodologico, Roma, Aprile 2024.

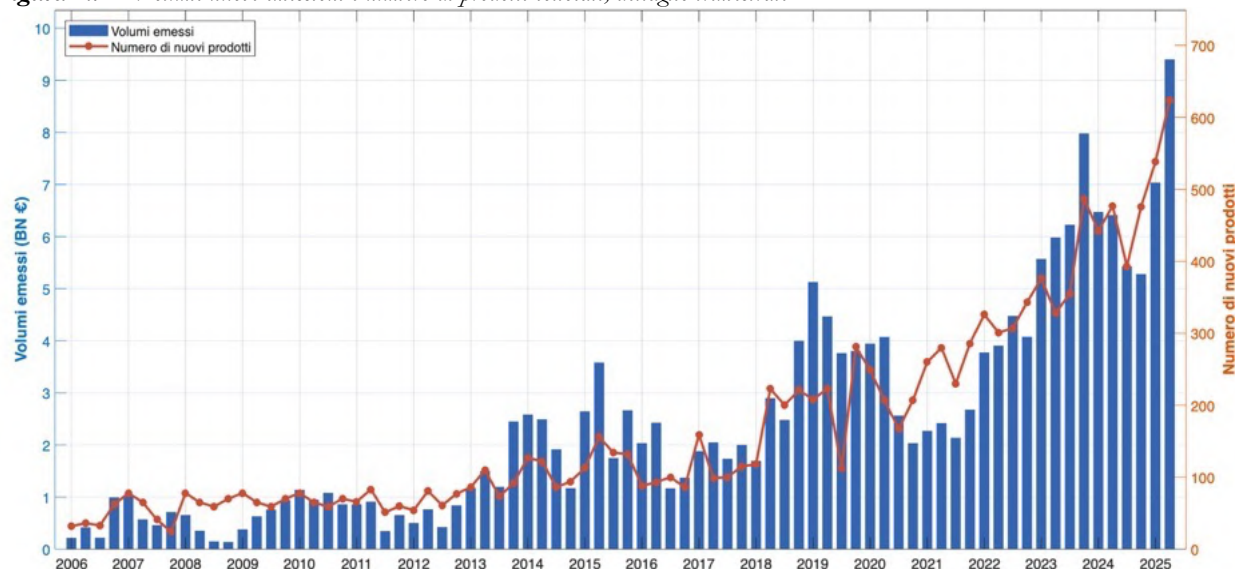
⁷ EUSIPA, *Q1 2025 market report update*, Aprile 2025.

⁸ I dodici emittenti considerati nell'analisi risultano essere membri ACEPI ad eccezione di Marex Financial.

⁹ Vorvel è un sistema multilaterale di negoziazione italiano dedicato principalmente allo scambio di strumenti finanziari non quotati su mercati regolamentati. Nel contesto degli investment certificates e dei prodotti strutturati, si affianca ad altre sedi di negoziazione presenti nel mercato italiano, come SeDeX ed EuroTLX.

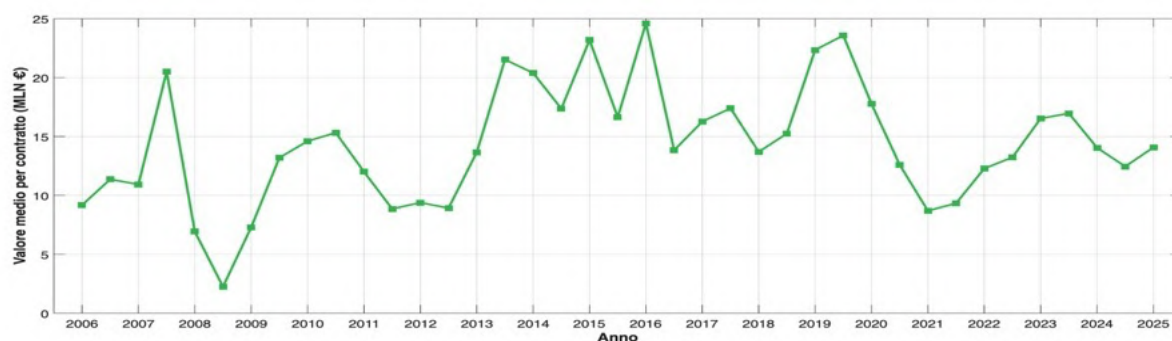
2013-2016 in cui si è registrato un lieve aumento. Nell'ultimo report disponibile pubblicato in riferimento al secondo trimestre 2025 il numero dei nuovi certificati emessi ha registrato un nuovo massimo storico evidenziando la quotazione nel mercato primario di 624 nuovi prodotti. Questo dato è rappresentativo di un incremento del numero delle emissioni di oltre il 15% QoQ e di quasi il 40% su base annuale.

Figura 1.7 – Volumi nuove emissioni e numero di prodotti collocati, dettaglio trimestrale



Fonte: Elaborazione propria da dati ACEPI

Figura 1.8 – Volume medio singola emissione, dettaglio trimestrale



Fonte: Elaborazione propria da dati ACEPI

Disaggregando l'ammontare collocato tra i prodotti a capitale condizionatamente protetto ed i prodotti a capitale protetto si nota come quest'ultima categoria, a partire dal 2021, rappresenta la principale classe di prodotto strutturato in termini di volumi emessi con una quota che nell'ultimo biennio si è attestata tra il 60% ed il 70% del totale. Prima dell'anno pandemico, si registra, al contrario, un sostanziale equilibrio tra queste due categorie. I *credit linked certificates* hanno fatto la loro comparsa nel mercato italiano nell'anno 2020 e rappresentano oggi una componente marginale dei volumi emessi. La quota di mercato di questa classe di prodotti ha raggiunto il suo massimo nel 2022 (7% del totale) anche per via

dal rialzo dei tassi di interesse che ha contribuito a rinnovare l'interesse della clientela retail per tutto il comparto obbligazionario. In quell'anno sono infatti stati emessi poco più di un miliardo di euro di *credit linked certificates*. Per quanto riguarda i volumi emessi in riferimento ai diversi emittenti, Intesa Sanpaolo nell'anno 2025 risulta aver collocato poco più della metà del totale dei certificati emessi nei Segmenti SeDeX ed EuroTLX. Come evidenziato dai dati presentati nella tabella 1.1, tale risultato appare riconducibile in misura prevalente al ruolo che questo operatore nel comparto dei prodotti a capitale protetto. Il mercato dei prodotti a capitale condizionatamente protetto, seppur anch'esso sia contraddistinto dalla leadership del gruppo bancario torinese, risulta essere più frammentato. Il principale player in riferimento al mercato dei credit linked notes risulta essere Mediobanca che si è contraddistinta nell'aver reso accessibile anche alla clientela retail l'investimento in obbligazioni subordinate delle primarie istituzioni finanziarie continentali oltre ad una variegata gamma di obbligazioni corporate.

Tabella 1.1 - Importo collocato – Valori in Milioni di euro¹⁰

Banca	Categoria	2021		2022		2023		2024		H1 2025	
		Valore	%	Valore	%	Valore	%	Valore	%	Valore	%
Intesa Sanpaolo	Collocato	3.906	41.1	7.781	48.0	15.897	61.7	12.061	51.1	8.495	51.7
	Cap. Protetto	1.836	63.0	6.071	62.8	13.150	73.5	8.924	63.3	6.269	60.1
	Cap. Cond. Prot.	2.070	32.3	1.710	31.2	2.607	39.9	2.993	35.8	1.957	38.8
	Credit Linked Notes	-	-	-	-	139	10.4	144	13.1	269	31.4
Unicredit	Collocato	1.097	11.5	2.612	16.1	2.767	10.7	5.086	21.6	3.682	22.4
	Cap. Protetto	281	9.6	1.566	16.2	1.307	7.3	2.849	20.2	2.316	22.2
	Cap. Cond. Prot.	816	12.7	1.045	19.1	1.460	22.4	2.060	24.6	1.146	22.7
	Credit Linked Notes	-	-	-	-	-	-	149	13.6	126	14.7
BNP Paribas	Collocato	2.063	21.7	2.262	13.9	2.695	10.5	2.545	10.8	1.627	9.9
	Cap. Protetto	-	-	385	4.0	1.173	6.6	872	6.2	443	4.2
	Cap. Cond. Prot.	2.002	31.2	1.442	26.3	1.120	17.1	1.455	17.4	1.056	20.9
	Credit Linked Notes	-	-	415	38.8	398	29.9	210	19.2	128	14.9
Mediobanca	Collocato	1.194	12.6	1.495	9.2	1.592	6.2	1.553	6.6	829	5.0
	Cap. Protetto	5	0.2	86	0.9	195	1.1	107	0.8	-	-
	Cap. Cond. Prot.	1.091	17.0	992	18.1	848	13.0	951	11.4	509	10.1
	Credit Linked Notes	-	-	414	38.7	541	40.6	495	45.2	298	34.8
Société Générale	Collocato	446	4.7	503	3.1	642	2.5	738	3.1	329	2.0
	Cap. Protetto	46	1.6	40	0.4	-	-	-	-	35	0.3
	Cap. Cond. Prot.	385	6.0	216	3.9	319	4.9	571	6.8	239	4.7
	Credit Linked Notes	-	-	241	22.5	254	19.1	97	8.9	36	4.2
Banco BPM	Collocato	803	8.4	1.515	9.3	2.008	7.8	792	3.4	654	4.0
	Cap. Protetto	750	25.7	1.510	15.6	1.990	11.1	724	5.1	646	6.2
	Cap. Cond. Prot.	53	0.8	5	0.1	18	0.3	69	0.8	-	-
BPER Banca	Collocato	-	-	89	0.5	-	-	520	2.2	664	4.0
	Cap. Protetto	-	-	89	0.9	-	-	520	3.7	664	6.4
	Cap. Cond. Prot.	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Barclays	Collocato	-	-	-	-	76	0.3	272	1.2	61	0.4
	Cap. Protetto	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	Cap. Cond. Prot.	-	-	76	1.2	254	3.0	108	2.1	-	-
Totale Mercato	Collocato	9.509	100.0	16.236	100.0	25.764	100.0	23.595	100.0	16.441	100.0
	Cap. Protetto	2.917	30.7	9.660	59.5	17.888	69.4	14.089	59.7	10.435	63.5
	Cap. Cond. Prot.	6.416	67.5	5.477	33.7	6.532	25.3	8.374	35.5	5.044	30.7
	Credit Linked Notes	-	-	1.070	6.6	1.332	5.2	1.095	4.6	857	5.2

Elaborazione propria da dati ACEPI

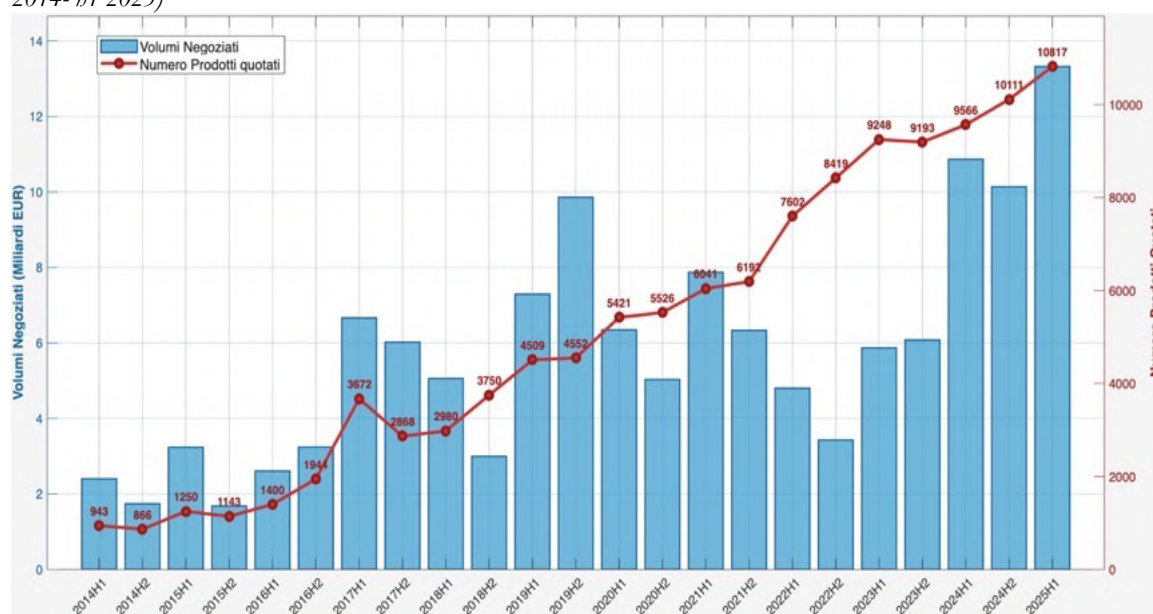
Mercato secondario:

Anche spostando l'attenzione sui dati tipici del mercato secondario in riferimento ai comparti dedicati agli *investment certificates* di Borsa Italiana, nel periodo d'analisi compreso tra l'inizio del 2014 ed il secondo trimestre dell'anno 2025 emerge con chiarezza il crescente interesse degli investitori verso questa Asset class. Questo lo si apprezza sia in riferimento ai volumi degli scambi che è aumentato dai quattro miliardi di euro del 2014 fino agli oltre 22 miliardi attuali così come in riferimento al controvalore complessivo

¹⁰ I dati relativi a Banca Cesare Ponti sono stati ricondotti a BPER Banca, mentre le emissioni di Banca Akros sono state accorpate a quelle di Banco BPM.

quotato che, sempre secondo i dati pubblicati dall'EUSIPA, ha superato i 71 miliardi di euro registrando un incremento del 26% nell'ultimo anno. Nel periodo in esame, non sono solo aumentati i volumi negoziati ma anche il numero dei prodotti quotati che hanno evidenziato una crescita che, al contrario di quanto si osserva in funzione ai volumi negoziati, non ha registrato flessioni neppure nelle fasi di maggiore instabilità dei mercati finanziari. L'ampliamento dell'offerta si traduce nella possibilità per gli investitori di accedere ad un più ampio assortimento sia per quanto riguarda la selezione dei sottostanti che in riferimento alla scelta delle strutture di payoff e dell'orizzonte temporale.

Figura 1.9– Volumi di certificati d'investimento negoziati nel mercato SeDeX e EuroTLX e Numero di prodotti quotati (h1 2014- h1 2025)



Elaborazione propria da dati EUSIPA

L'importanza dei certificati di investimento nel mercato italiano è ancor più evidente se questi dati vengono confrontati con quelli degli altri principali mercati continentali. Sempre secondo quanto pubblicato dall'*European Structured Investment Products Association*, il mercato nostrano risulta essere il principale in Europa per volumi di prodotti di investimento strutturati negoziati avendo superato, nell'ultimo biennio, il precedente primato tedesco. Se i volumi dei certificates risultano essere in decisa crescita nei comparti di Borsa italiana, lo stesso non si sta verificando per i più storici mercati mitteleuropei. Nel primo caso, i volumi sono risultati essere pressoché stabili nel decennio analizzato mentre, in riferimento alla Germania, si osserva una progressiva riduzione del transato passando dai quasi 25 miliardi di euro registrati nel 2015 agli attuali 14 miliardi. Nonostante questo calo nei volumi negoziati, in riferimento al numero di prodotti quotati, i mercati svizzeri e tedeschi risultano ancora essere i leader a livello europeo. In particolare, a fine anno 2024 risultano negoziati oltre 42.000 diversi certificati. Osservando invece la disaggregazione dei volumi di vendita nelle diverse categorie di prodotti si rileva che il mercato italiano dei prodotti di investimento si caratterizza per una prevalenza di strumenti a capitale protetto che rappresentano oltre la metà del turnover complessivo. Questo dato

risulta essere in controtendenza rispetto a tutti gli altri principali mercati europei nei quali risultano predominanti i prodotti di tipo *yield- enhancement*¹¹.

1.2.2. Il trattamento fiscale dei certificates

Questa rilevanza dei certificati di investimento nel mercato italiano è in parte dovuta ad aspetti di natura tributaria. Secondo quanto previsto dall'articolo 67¹² del Testo Unico delle imposte sul Reddito (TUIR), i certificati, in molti casi, rientrano nella fattispecie dei c.d. "*Redditi Diversi*" al contrario di quanto avviene per la maggioranza dei più tradizionali strumenti finanziari che vengono invece considerati "*Redditi da Capitale*". Questo avviene sia in riferimento al plusvalore eventualmente realizzato al momento della vendita così come in riferimento ai flussi cedolari che vengono riconosciuti all'investitore lungo il ciclo di vita dello strumento (ad eccezione delle cedole incondizionate il cui godimento è indipendente dall'evoluzione di prezzo dei sottostanti). Non si tratta questa di una distinzione di scarsa rilevanza: seppur entrambe le tipologie di reddito siano attualmente assoggettate all'aliquota di imposta sostitutiva del 26%, i proventi derivati dai certificates consentono la compensazione di eventuali minusvalenze pregresse accumulate nel c.d. "*zainetto fiscale*" nei precedenti quattro anni anche se realizzate con altri strumenti finanziari. Proprio in funzione di questo inquadramento giuridico-fiscale unitamente alla significativa discrezionalità riconosciuta agli emittenti, risultano sempre più diffusi dei *certificates* che si prestano ad essere utilizzati proprio con l'obiettivo di poter offrire all'investitore uno strumento adatto a perseguire finalità di ottimizzazione fiscale: **i certificati Maxi Cedola**.

Questa struttura, che si rivolge agli investitori con delle minusvalenze in scadenza entro l'anno, si caratterizza per offrire un flusso cedolare di un importo molto elevato rispetto agli standard di mercato poco dopo la sua quotazione. Questo flusso cedolare, che non può prescindere dall'essere condizionato all'andamento del sottostante per rientrare nella fattispecie fiscale di "reddito diverso", viene riconosciuto all'investitore generalmente nel primo mese di negoziazione. Il trigger per l'erogazione della Maxi Cedola iniziale risulta inoltre essere propriamente teorico incidendo in maniera esclusiva sulla natura fiscale dello strumento più che sulla probabilità di erogazione del primo flusso cedolare. Questo strumento viene collocato da tutti i principali intermediari finanziari italiani negli ultimi mesi dell'anno. Nonostante le successive cedole risulteranno essere inferiori rispetto a strumenti simili presenti sul mercato e nonostante il significativo ribasso delle quotazioni che si verifica in concomitanza della prima

¹¹ Terminologia utilizzata da EUSIPA per identificare i prodotti strutturati caratterizzati da una struttura che garantisce agli investitori una partecipazione parziale ai rialzi dei sottostanti (Cap) oltre riconoscimento di cedole periodiche

¹² "Sono redditi diversi se non costituiscono redditi di capitale ovvero se non sono conseguiti nell'esercizio di arti e professioni o di imprese commerciali o da società in nome collettivo e in accomandita semplice, né in relazione alla qualità di lavoratore dipendente lett. c-quater) Redditi, diversi da quelli precedentemente indicati, comunque realizzati mediante rapporti da cui deriva il diritto o l'obbligo di cedere od acquistare a termine strumenti finanziari, valute, metalli preziosi o merci ovvero di ricevere o effettuare a termine uno o più pagamenti collegati a tassi di interesse, a quotazioni o valori di strumenti finanziari, di valute estere, di metalli preziosi o di merci e ad ogni altro parametro di natura finanziaria. Agli effetti dell'applicazione della presente lettera sono considerati strumenti finanziari anche i predetti rapporti"

payment date, questo permette di riportare le minusvalenze negli anni successivi in modo agevole evitando che queste scadano senza essere compensate.

Anche se si tratta di un'imposta che impatta in modo non significativo la clientela retail, è utile sottolineare che i certificates, al contrario di quanto avviene per le azioni e per altri strumenti derivati, non sono soggetti a Tobin Tax¹³.

1.2.3. Rischio e complessità: perché i due temi non sempre sono legati

Una terza ragione che ha motivato la scelta di analizzare il mercato degli investment certificates in questa tesi risiede nelle sofisticate e distintive caratteristiche in termini di rischio proprie di questi strumenti che spesso risultano poco comprese o sottovalutate. In questa asset class più che in altre è opportuno saper distinguere tra la complessità dello strumento ed il relativo rischio di mercato evitando di cadere in generalizzazioni semplicistiche. Tra le autorità di regolamentazione, la questione costituisce un tema di rilevanza e, a tal proposito, si segnalano le opinion dell'European Securities and Markets Authority (ESMA) che hanno richiamato l'attenzione delle autorità nazionali sulle misure che gli intermediari devono adottare sin dalla fase di design dei così definiti “prodotti finanziari connotati da profili di complessità”.

Nell'Opinion ESMA 2014/146 vengono identificati i prodotti finanziari complessi come categoria residua rispetto a quelli che rispettano i criteri di non complessità delineati dalla Direttiva MiFID I introducendo, inoltre, una lista di caratteristiche esplicative tipiche di questo genere di prodotti includendo in gran parte attributi propri degli *investment certificates*:

- Prodotti derivati o che incorporano derivati.
- Prodotto composto da uno o più strumenti sottostanti difficili da valutare o strutturato in modo tale da rendere complessa la valutazione dei rischi e degli scenari di rendimento.
- Prodotti che utilizzano come riferimento indici “opachi” creati dall'emittente stesso anziché indici di mercato standard.
- Prodotti che presentano strutture di payoff complesse basate su più variabili o formule matematiche articolate.
- Prodotti che includono una protezione del capitale o condizionata che può venire meno al verificarsi di determinati eventi.

Tale classificazione, che chiarisce la natura dei certificates in questa fattispecie, è stata ribadita anche dal successivo orientamento ESMA/2015/1787 che esemplifica mediante un elenco strutturato gli strumenti di debito che rientrano in questo ambito di applicazione.

¹³ Imposta italiana sulle transazioni finanziarie introdotta nel 2013, applicata all'acquisto di azioni di società italiane con capitalizzazione superiore a 500 milioni di euro, a specifiche operazioni su derivati e al trading ad alta frequenza. A decorrere dal 2026, nell'ambito della legge di bilancio, le aliquote sono state incrementate: per le transazioni azionarie l'imposta è pari allo 0,20% del valore dell'operazione se effettuata su mercati regolamentati (0,40% se OTC).

Sulle Opinion di ESMA si è espressa anche CONSOB nell'ambito della “*Comunicazione sulla distribuzione di prodotti finanziari complessi ai clienti retail*” del 22 dicembre 2014, conformandosi alle indicazioni fornite dall'autorità europea. Gli obiettivi delineati da questo dibattito risultano positivamente orientati al rafforzamento della tutela della clientela retail mediante la previsione di obblighi informativi rafforzati in capo agli intermediari finanziari promuovendo *selling practices* volte a verificare la piena comprensione dell'investitore ed a garantire l'adeguatezza del prodotto rispetto agli obiettivi individuali. Meno condivisibile risulta la raccomandazione di CONSOB che, in maniera forse fin troppo *tranchant*, anticipa la previsione di limiti specifici all'investimento in prodotti strutturati calibrati sulla base delle condizioni socioeconomiche del potenziale cliente (grado di esperienza, titolo di studio, età, esperienze professionali, patrimonio minimo detenuto presso l'intermediario) includendo inoltre delle soglie massime di concentrazione nel portafoglio del cliente. In nessun caso tali raccomandazioni tengono conto del rischio di mercato effettivo, finendo per trattare allo stesso modo i più speculativi certificati a leva e i più conservativi prodotti a capitale protetto. I limiti di questa relazione biunivoca tra complessità del prodotto e rischio finanziario vengono evidenziati anche in [Viganò et al., 2019](#) i quali si collocano nel dibattito aperto dalle autorità di vigilanza in merito alla definizione di “prodotti complessi” richiamando la necessità di mantenere separato il livello di ingegneria finanziaria dalla valutazione del rischio di mercato associato evitando di partire dal presupposto che un prodotto strutturato risulta inadatto ad essere collocato presso clientela retail in quanto tale. Gli stessi autori evidenziano come anche un prodotto caratterizzato da un'elevata complessità, può assumere caratteristiche di rischio del tutto assimilabili a quelle di un bond plain vanilla.

1.2.4. Il mercato italiano dei certificates: un tema trascurato nella letteratura accademica

Un'ulteriore ragione che mi ha indirizzato verso questa tematica è la scarsa attenzione che la letteratura accademica ha dedicato al mercato italiano degli *investment certificates*. Nonostante il mercato nostrano sia oggi il principale in Europa dal punto di vista dei volumi negoziati ed il crescente interesse della clientela retail verso questa particolare asset class, non risultano ad oggi pubblicati dei lavori di ricerca volti ad analizzare empiricamente il mercato italiano degli *investment certificates* assimilabili a quanto disponibile in riferimento agli altri mercati continentali.

La varietà degli strumenti disponibili nonché l'eterogeneità degli attori coinvolti giustificherebbe una analisi olistica in grado di offrire una vista complessiva in merito alle sue peculiarità strutturali, ai costi impliciti tipici di questo strumento oltre alle implicazioni che ne derivano per una corretta asset allocation. Una tale analisi potrebbe inoltre ben collocarsi nel sempre attuale dibattito regolamentare in merito all'opacità dei costi impliciti di questi strumenti che, come rilevato nel caso di altre Borse valori continentali, sembrano discostarsi da quanto esplicitamente dichiarato dagli emittenti nei prospetti informativi contribuendo inoltre a rendere più trasparente il modello di pricing utilizzato dai diversi

intermediari finanziari sia nell'ambito della loro attività di market making così come nell'ambito del collocamento dei prodotti nel mercato primario.

La letteratura ad oggi disponibile in riferimento al mercato italiano si focalizza su un numero molto ristretto di strumenti derivati privilegiando l'analisi degli aspetti più tecnici legati al loro processo di pricing.

Tra i lavori di maggior rilievo si segnala [A.Bottaso, M. Fusaro, P.G.Giribone, A.Tissone, 2023](#). Gli autori evidenziano come il metodo Quasi-Monte Carlo migliori la velocità di convergenza al fair value rispetto al più tradizionale metodo Monte Carlo senza indurre bias. Applicando le c.d. Low Discrepancy Sequences (LDS)¹⁴ alla base del metodo in esame, gli autori prezzano varie tipologie di prodotti di investimento strutturati partendo dalla più elementare struttura del tipico certificato a capitale Protetto con Cap, il cui pricing risulta possibile anche ricorrendo ad un framework di valutazione analitico mediante il modello di Black-Scholes-Merton, ad altre strutture più complesse rappresentate:

- *“Banca Ponti Certificate Protection Cap Euro Stoxx 50 25/12/2026”* (ISIN: IT0005468142) in riferimento al più semplice certificato a capitale Protetto con Cap.
- *“Banca Ponti Certificate Protection Cap on EUROSTOXX50 2027”* (ISIN: IT0005483380) caratterizzato dall'effetto memoria.
- *“Phoenix Autocallable linked to the SD3E Index”* (ISIN: XS2168926827) emesso da JP Morgan in rappresentanza dei certificati che si distinguono per via della presenza del meccanismo di Autocall.

Nel primo caso, gli autori hanno avuto modo di verificare la correttezza della convergenza con il pricing determinato in forma chiusa facendo ricorso al modello BSM estendendo poi, con il conforto di questo primo risultato, la stessa metodologia a strutture più complesse. Gli stessi autori, rilevano che la principale carenza di questo metodo è rappresentato dall'impossibilità di stimare preventivamente l'errore di pricing in funzione al numero di simulazioni condotte.

In [Guidolin, Leonetti, Pedio, 2024](#), gli autori analizzano se e quanto un investitore razionale e perfettamente informato con preferenze CRRA possa trarre beneficio dall'inserimento di certificati di investimento in portafoglio rispetto ad una allocazione stock-bond. Attraverso il metodo Monte Carlo viene evidenziato come il guadagno in termini di utilità dipenda fortemente dal tipo di certificato e dal grado di avversione al rischio (nonché dal modello di pricing utilizzato)¹⁵. I maggiori benefici apportati dall'inclusione di questa asset class in portafoglio sono riservati agli investitori meno avversi al rischio. Inoltre, gli stessi autori dimostrano come i certificati caratterizzati dalla protezione del capitale a

¹⁴ si tratta di insieme di punti deterministici pensati al fine di coprire uniformemente uno spazio multidimensionale riducendo così la discrepanza rispetto alla distribuzione uniforme migliorando così l'efficienza delle simulazioni nonché la rapidità della convergenza.

¹⁵ Nel paper vengono proposti quattro modelli di valutazione distinti: con volatilità stocastica (SV), con volatilità stocastica e jumps nel prezzo (SVJR), con volatilità stocastica e jumps in varianza (SVJV), con volatilità stocastica e jumps sia nel prezzo simulato così come in varianza (SVCJ). Il ricorso a modelli più sofisticati (SVCJ), secondo gli autori, riduce il guadagno di utilità atteso derivante dall'inclusione dei certificati di investimento in portafoglio.

scadenza (e.g. Equity Protection) offrono dei guadagni marginali in termini di utilità per via della loro difficoltà di compensare costi e commissioni mentre l'inclusione di prodotti Bonus Cap ed Express Certificates in portafoglio può essere in grado di migliorare significativamente il rendimento risk-adjusted del portafoglio. L'analisi proposta risulta essere puramente modellistica e basata su strutture standardizzate di certificati senza riferimenti ad ISIN specifici o prodotti effettivamente negoziati sul mercato.

Nel già citato lavoro di [Viganò et al., 2019](#) gli autori prezzano tre diversi certificati mediante il metodo Monte Carlo analizzando le differenze che emergono rispetto al prezzo di borsa. L'approccio proposto viene considerato ideale al fine di stimare correttamente ed in maniera diretta il valore dello strumento finanziario senza fare ricorso ai portafogli di replica in opzioni. Gli autori, in riferimento ai tre prodotti analizzati¹⁶, non trovano evidenze di markup a sfavore dell'investitore in quanto il disallineamento rilevato tra prezzi di borsa e prezzi simulati non risulta avere una direzione univoca. Gli stessi autori rilevano, inoltre, delta maggiori nel caso di prodotti più complessi.

Di diversa natura risulta essere il lavoro condotto da [G. Zanotti, 2024](#) che si propone di esaminare, attraverso l'analisi dei KID di 1702 prodotti di investimento emessi nel 2021 e nel 2022, il costo medio dei prodotti emessi nel mercato primario secondo i prospetti informativi rilasciati dagli emittenti disaggregando i certificati a capitale protetto da quelli a capitale non protetto. La stessa autrice, già direttrice scientifica ACEPI, evidenzia come seppur i costi totali iniziali risultino essere in media più elevati in riferimento ai certificati a capitale condizionatamente protetto (4,29% nell'anno 2021 e 4,51% nell'anno 2022) questi sono caratterizzati da un costo annualizzato inferiore rispetto ai certificati a capitale protetto in ragione delle loro maggiore durata media. In riferimento all'anno 2021 il costo medio dei certificati a capitale protetto all'emissione è risultato essere dello 0,61% mentre per i certificati a capitale condizionatamente protetto si rileva un costo medio annuo del 1,38%. I dati dell'anno successivo risultano essere simili (0,74% vs. 1,29%) così come simili risultano essere, sempre secondo la stessa autrice, alle rilevazioni condotte nel biennio 2019-2020.

1.3. Le principali questioni aperte in merito ai Certificati di investimento

Se anziché limitarsi al solo contesto italiano si vuole considerare il quadro internazionale e la relativa letteratura, si rilevano alcune tematiche ricorrenti che sono state oggetto di analisi approfondite condotte dai più celebri accademici del settore. Il principale filone di ricerca in materia è volto ad indagare il markup applicato dai diversi emittenti confrontando il prezzo di mercato a cui vengono emessi e successivamente negoziati questi prodotti con quello teorico tipico di un mercato *frictionless*. È

¹⁶ I certificati considerati sono: 1.IT0004956964, prodotto a capitale protetto (rimborso incondizionato al valore nominale) emesso da Banca Aletti con sottostante Generali, 2.IT0004963754, prodotto "target coupon" a capitale protetto emesso da Banca Aletti con sottostante Unicredit, 3.NL0010623500, prodotto a capitale protetto con possibilità di rimborso anticipato (Autocall) emesso da BNP Paribas con sottostante Eni.

comunemente noto che il prezzo a cui i certificates vengono quotati sia superiore rispetto al prezzo teorico di equilibrio per via dei costi sostenuti dagli emittenti per replicare a loro volta la struttura dei payoff mediante il mercato delle opzioni e, ancor più, del margine di profitto riconosciuto allo stesso nell'ambito della sua attività di intermediazione.

Altri aspetti di primaria rilevanza nei principali lavori ad oggi pubblicati riguardano le scelte operative condotte dagli emittenti nella strutturazione dei prodotti (in modo particolare per quanto riguarda l'inclusione di sottostanti di tipo azionario caratterizzati da un elevato dividend yield) nonché alcune riflessioni in merito alla possibilità di default dell'emittente.

1.3.1. La valutazione dei certificates: il markup tra prezzo teorico e “prezzo di borsa”

È ampiamente riconosciuto che i certificati di investimento risultano emessi e negoziati a valori superiori rispetto al c.d. “*prezzo equo*” riscontrabile in un ipotetico mercato esente da ogni genere di frizione.

Tale markup, la cui entità di frequente differisce da quanto indicato nei prospetti informativi dei singoli prodotti, si mostra eterogeneo lungo l'intero ciclo di vita del prodotto risultando influenzato da un gran numero di variabili, tra cui la scadenza, la tipologia di struttura di payoff, il mercato di riferimento, le caratteristiche dei sottostanti. Questo fattore, che può comportare delle rilevanti ripercussioni sul rendimento atteso dell'investitore, risulta di difficile individuazione da parte della clientela retail in quanto, per la sua individuazione, risulta necessario il ricorso ad un modello di pricing specifico. Le valutazioni di questo genere di investitori, come evidenziato da [Entrop et al., 2016](#) sono spesso influenzate da fattori comportamentali come la familiarità con l'emittente o il prodotto piuttosto che da valutazioni formali in merito al profilo di rischio-rendimento atteso proprio del prodotto. A questo si aggiunge la tendenza degli investitori a sottostimare la probabilità di ribassi significativi dei sottostanti, spesso condizionata dall'attrattività dell'elevato flusso cedolare riconosciuto dallo strumento, rendendo la valutazione del profilo di rischio-rendimento particolarmente complessa e incline ad errori di giudizio. Un ulteriore aspetto legato al misspricing che viene talvolta indagato in letteratura è la differenza tra i costi che vengono divulgati dai diversi emittenti ed i costi effettivi derivanti dal processo di pricing per via del fatto che quanto condiviso dall'emittente nei prospetti informativi risulta essere solo una parte dei costi impliciti sopportati dagli investitori. Come evidenziato da [Jørgensen et al., 2011](#) in riferimento al mercato danese, solo metà del sovraccosto dei prodotti di investimento strutturati era spiegato dai costi dichiarati dall'intermediario finanziario al momento dell'emissione. Gli stessi autori rilevano come, seppur l'entità media dei costi di questi prodotti dichiarati nei prospetti informativi si stia riducendo nel corso degli anni, questo non stia accadendo in riferimento ai “costi nascosti” che risultano anche crescenti in base alla complessità del prodotto¹⁷.

¹⁷ Per complessità del prodotto, nel framework proposto in Jørgensen et al., 2011 ci si riferisce alla presenza di sottostanti non tradizionali (e.g. presenza di indici esotici previsti su misura dai singoli emittenti), basket di azioni/indici anziché singoli asset, presenza di Cap, presenza di opzioni esotiche

Altri filoni di ricerca si occupano invece di ricercare la relazione tra i rendimenti attesi dell'investimento in prodotti strutturati in relazione al markup rilevato nel prezzo a cui lo stesso prodotto è negoziato. In particolare, nel celebre articolo "*The dark side of financial Innovation: A case study of the pricing of a retail financial product*", B.J. Henderson e N.D. Pearson, 2011 evidenziano come alcuni prodotti di investimento strutturati negoziati nei primi anni 2000 in USA si caratterizzassero da rendimenti attesi negativi derivanti di markup all'emissione superiori all'8%.

Molti sono i mercati che nel corso degli ultimi decenni sono stati indagati in letteratura al fine di riscontrare le principali evidenze empiriche intrinseche all'attività dei diversi market-maker ma nessuna di queste è stata condotta in riferimento al rilevante mercato italiano.

1.3.2. La scelta dei sottostanti da parte dell'emittente: l'impatto del dividend yield

Un ulteriore elemento che concorre ad aumentare il sovrapprezzo a cui sono negoziati gli investment certificates è legato al dividend yield dei sottostanti. Si ricorda che l'investitore in prodotti d'investimento strutturati, non gode di alcun diritto patrimoniale ed amministrativo nei confronti delle società che figurano come sottostanti del prodotto finanziario in esame. Tuttavia, questo rappresenta un elemento cruciale per la redditività degli emittenti nell'ambito della loro attività di intermediazione finanziaria. Come evidenziato da Hernandez et al., 2007, in relazione al mercato dei certificati Outperformance emessi nel mercato europeo, la maggior parte dei profitti dei diversi emittenti sono garantiti dall'incasso dei dividendi dei sottostanti acquistati con scopi di *hedging*.

Nello stesso articolo, gli autori mettono in luce la tendenza degli emittenti nel selezionare strategicamente i sottostanti caratterizzati da un elevato dividend yield facendo anche attenzione a prevedere la scadenza dello strumento in una data di poco successiva alla Ex-Dividend date. Così facendo, gli emittenti beneficiano della discesa del prezzo del sottostante (riconoscendo così all'investitore un valore che in media risulterà essere inferiore rispetto allo stesso prodotto scritto su un sottostante che non distribuisce alcun utile) appropriandosi inoltre dell'ammontare del dividendo stesso. Ciò deriva dalla strategia di copertura dell'emittente che, mantenendo un'esposizione tendenzialmente market neutral, nel caso dei certificati Outperformance si struttura mediante l'acquisto del sottostante e l'acquisto simultaneo di opzioni call sullo stesso. Nel caso in cui sia previsto nel contratto un Cap nel rendimento del certificato, l'emittente vende inoltre delle opzioni call ad uno strike che coincide con il livello del Cap stesso. Da questo semplice esempio ben si comprende come i dividendi rappresentino, in questo contesto, una fonte di reddito pressoché certa per l'emittente che concorre a ridurre il costo di strutturazione del prodotto e ad incrementare il margine di intermediazione tipico di questa attività. Nel corso della loro attività di ricerca, gli autori hanno evidenziato come il dividend yield dei sottostanti nel campione d'analisi (2,28%) risulti, in maniera statisticamente significativa, superiore rispetto al dividend yield dell'industria di riferimento e del mercato di appartenenza (1,64%). Anche in questo caso, non risultano studi volti ad indagare l'attività dei diversi emittenti attivi nel mercato italiano.

1.3.3. Il Rischio di Credito: dal bail-in al caso Smart ETN

Così come per tutti gli strumenti di debito, anche in riferimento agli investment certificates la scelta degli investitori non può non tenere conto della possibilità di default dell'emittente in quanto i flussi di cassa previsti contrattualmente, sono subordinati alla capacità dell'emittente stesso di far fronte al pagamento. Benché generalmente gli emittenti di certificati di investimento siano delle istituzioni finanziarie altamente regolamentate e di elevato prestigio, permane la possibilità che situazioni di tensione patrimoniale o di deterioramento del merito creditizio possano incidere in maniera negativa sul valore dei certificati di investimento. A questo fine si segnala il recente caso che ha coinvolto Cirdan Capital e la sua controllata italiana Smart Bank, emittente di certificati negoziati nel mercato italiano.

Nel dicembre 2023, Banca d'Italia ha disposto il commissariamento delle due entità italiane del gruppo Cirdan, Cirdan Group S.p.A. e Smart Bank S.p.A. per gravi irregolarità gestionali e violazioni normative. Questo ha comportato, nell'immediato, una sostanziale illiquidità degli strumenti emessi dall'intermediario a causa della decisione di Equita SIM (fino ad allora Liquidity provider dei prodotti in questione) di risolvere unilateralmente il suo contratto sospendendo con effetto immediato la sua attività di market making nel mercato EuroTLX rendendo impossibile la negoziazione. Nei giorni successivi, soprattutto per via dell'intervento del regolatore, la negoziazione è stata garantita, seppur a forte sconto¹⁸, fino alla data del 27 marzo 2024 oltre la quale la vendita degli strumenti si è resa possibile solo in mercati OTC.

Seppur l'emittente ad oggi abbia continuato a pagare senza ritardi premi e rimborsi anche per questi certificati non negoziati, questo esempio evidenzia come il rischio emittente negli investment certificates possa concretizzarsi in forme diverse ed ulteriori rispetto al tradizionale scenario di default ma anche di come le disposizioni del quadro regolamentare abbiano un diretto impatto sul corretto funzionamento dei mercati finanziari e sul valore dei titoli negoziati. In tale prospettiva, un ulteriore elemento di rilievo è rappresentato dal quadro normativo europeo secondo quanto introdotto dalla direttiva comunitaria 59/2014 nota anche come BRRD (*Bank Recovery and Resolution Directive*). Questa direttiva, che ha introdotto il meccanismo del bail-in quale strumento centrale per la gestione delle crisi bancarie con l'obiettivo di evitare l'intervento pubblico nel salvataggio degli intermediari in situazioni di dissesto, interessa anche gli investment certificates in quanto strumenti *bail-inable* così come avviene per i più tradizionali strumenti di debito. In ragione di questo, l'investitore in investment certificates risulta potenzialmente esposto alla riduzione totale o parziale del valore nominale dello strumento e alla sua contestuale conversione in azioni dell'emittente non solo in caso di default conclamato, ma anche qualora sussistano delle violazioni dei requisiti patrimoniali minimi o un significativo deterioramento della situazione finanziaria dell'intermediario. Secondo quanto definito dalla stessa direttiva BRRD, i certificati di investimento rientrano tra le passività di tipo *senior unsecured* tanto che, questi strumenti,

¹⁸ Come segnalato dal portale specializzato "FreeFinance", si riportano casi di certificati a capitale protetto caratterizzati da rendimenti a scadenza annualizzati superiori al 18%.

sarebbero oggetto di svalutazione o conversione solo a seguito del totale azzeramento del capitale azionario e delle passività subordinate. Seppur tale scenario non si sia mai reso necessario esso non può essere relegato ad un'ipotesi puramente teorica. Nonostante queste premesse, i principali studi empirici evidenziano come, gli investitori retail, non siano soliti considerare adeguatamente questo fattore.

Il principale contributo è riconducibile al già citato lavoro di [Entrop et al., 2016](#) in gli autori mettono in dubbio le abilità degli investitori individuali evidenziando inoltre come il rischio emittente non venga adeguatamente considerato nei processi di scelta del prodotto sia dai soggetti che non sono soliti acquistare un gran numero di prodotti di investimento strutturati così come per investitori più esperti. La consapevolezza che il rischio di default non influenza la scelta di prodotto degli investitori spinge gli emittenti a non includere questo fattore nell'ambito del loro processo di pricing. Lo stesso autore evidenzia come il rischio di credito dell'emittente sia una componente significativa del markup rilevato in grado di spiegare il 39% di tale premium e come, all'aumentare del credit spread dell'emittente, in media tende a crescere anche il sovrapprezzo contribuendo così ad amplificare i margini di intermediazione in particolare per quegli intermediari finanziari caratterizzati da rating non particolarmente elevati. Evidenze di questo sono riscontrabili anche in [Baule et al., 2008](#).

1.4. Literature review

Seppur, come detto, il mercato italiano dei prodotti di investimento strutturati non sia stato oggetto di estesi lavori di ricerca, si rileva a livello internazionale un'intensa indagine accademica riguardante gli investment certificates con l'obiettivo di mettere in luce la complessa interazione tra il pricing di tali prodotti, l'incidenza del rischio di credito dell'emittente, le scelte strategiche operate da quest'ultimo e di studiare le modalità secondo cui la clientela retail si interfaccia con questa particolare asset class.

Uno dei principali lavori di ricerca volti ad indagare il markup a cui sono quotati i certificati di investimento risulta essere [Stoimenov, Wilkens, 2005](#) in cui gli autori, analizzando il mercato tedesco degli equity linked considerando 2556 strumenti quotati il 10 ottobre 2002 (per l'analisi dei prodotti negoziati nel mercato secondario) o emessi tra il 31 agosto 2001 ed il 10 ottobre 2002 (per quanto riguarda l'analisi del mercato primario). Tutti i prodotti considerati hanno come sottostante l'indice tedesco DAX o azioni appartenenti allo stesso indice riscontrando un sovrapprezzo medio all'emissione del 3,89%. La stessa attività di ricerca, così come evidenziato in [Jørgensen et al., 2011](#) in riferimento al mercato danese, [Wilkens, Erner e Röder, 2003](#) in riferimento al mercato tedesco e [Célérier e Vallée, 2017](#) per quanto riguarda diversi mercati europei, mette in luce sovrapprezzi crescenti in funzione della complessità del prodotto finanziario mostrando una importante relazione tra markup e la tipologia di opzioni necessarie per replicare il payoff del prodotto strutturato. Lo stesso studio fornisce evidenze del tendenziale decremento del markup man mano che i prodotti si avvicinano alla scadenza. Questa evidenza empirica, anche definita come "*Life Cycle hypothesis*", trova riscontro anche in [Wilkens, Erner e](#)

Röder, 2003, Entrop et al., 2016 oltre che, pur non venendo menzionata esplicitamente, anche in Henderson e Pearson, 2011 e Szymanowska, Horst e Veld, 2009.

Più controversa risulta essere la c.d. “*Order Flow Hypothesis*” introdotta da Wilkens, Erner e Röder, 2003 per spiegare le motivazioni della dipendenza temporale dei markup. Con questo ci si riferisce all’ipotesi secondo cui gli emittenti adottano politiche di pricing in base al volume atteso di acquisti e vendite dei prodotti lungo la loro vita. In questa attività di ricerca, focalizzata sul mercato tedesco dei prodotti reverse convertible e dei discount certificates negoziati nel novembre 2001¹⁹, viene proposta questa argomentazione per spiegare il comportamento massimizzante degli intermediari finanziari alla base della “*Life Cycle hypothesis*”. Secondo gli autori, all’inizio del ciclo di vita del prodotto (emissione), vista la prevalenza di acquisti da parte degli investitori, gli emittenti sono incentivati a prevedere prezzi più elevati al fine di massimizzare i profitti e coprire i costi operativi/di hedging. Con l’avvicinarsi della scadenza²⁰, la quantità di acquisti si riduce e, contestualmente, aumentano le vendite spingendo così gli emittenti a ridurre sistematicamente i markup. Tale ipotesi trova riscontro anche in Baule, 2011 il quale, analizzando il mercato tedesco, ha raccolto evidenze di questo comportamento strategico adottato dai market-maker spiegandole in relazione alla normativa fiscale tedesca. Prima del 2008, infatti, era prevista una particolare imposta che colpiva le plusvalenze generate da operazioni di durata inferiore all’anno. Gli autori evidenziano il particolare comportamento degli emittenti che, anticipando la preferenza degli investitori ad acquistare prodotti con durata residua di poco superiore all’anno, sono soliti applicare un markup maggiore in questo periodo per poi ridurlo gradualmente per scadenze più brevi. Tale ipotesi non trova però riscontro in Entrop et al., 2016 in cui, applicando la stessa metodologia su un orizzonte temporale più ampio e con un dataset composto da più di 10 milioni di giorni di valutazione, trovano riscontro dell’Order Flow Hypothesis solo per 3 dei 12 emittenti considerati evidenziando così la natura controversa del fenomeno.

Di gran rilievo si segnala inoltre il lavoro di Henderson, Pearson, 2011 in cui gli autori analizzano in maniera particolarmente critica l’elevato markup rilevato in riferimento ad un campione di 64 SPARQS²¹ emessi nel mercato statunitense da Morgan Stanley tra il 2001 ed il 2005 che è risultato essere, all’emissione, prossimo all’8%. Seppur evidenziando un decadimento di tale markup nei primi 140 giorni di negoziazione in linea con la Life Cycle Hypothesis, gli autori mettono in luce le scarse abilità di selezione da parte degli investitori per via degli anomali rendimenti attesi associati a tali prodotti mostrando inoltre come l’overpricing sia positivamente correlato alla volatilità implicita delle azioni sottostanti così come si evince in Entrop et al., 2016. Altri elementi determinati per il markup risultano essere l’entità dei dividendi distribuiti dai sottostanti come evidenziato in Entrop et al., 2016 e in

¹⁹ Nell’analisi vengono considerati i prezzi di chiusura di 170 prodotti reverse convertible e di 740 discount certificates con sottostante l’indice tedesco DAX, azioni appartenenti allo stesso paniere e l’indice tecnologico tedesco NEMAX. Viene inoltre identificato il markup medio. Per quanto riguarda Reverse convertible si riporta 3,04% in riferimento ai certificates con sottostante il DAX o azioni facenti parte dello stesso indice e del 3,89% in riferimento all’indice NEMAX. Maggiori caricamenti vengono identificati nei Discount Certificates (4,20% DAX vs. 10,04 NEMAX).

²⁰ Gli autori identificano questa fase a circa 2/3 della vita del prodotto

²¹ tipologia di certificati strutturati collocati nel mercato statunitense nei primi anni 2000, caratterizzati da una struttura payoff asimmetrica che combina una componente obbligazionaria con opzioni call sul sottostante.

Hernandez et al., 2007 così come il rischio di credito dell'emittente preso in analisi nei lavori di Entrop et al., 2016, Schertler, 2016 e Baule, 2008.

Per tutti i lavori di ricerca fin qui menzionati, l'identificazione del prezzo "*fair*" del certificato è stato calcolato sulla base di una valutazione per duplicazione che si basa sulla replica del prodotto strutturato mediante l'identificazione degli strumenti finanziari che lo compongono (a loro volta prezzati facendo ricorso al modello di Black Scholes per le opzioni *plain vanilla*). In un mercato privo di frizioni, per via del principio di non arbitraggio, le due valutazioni dovrebbero coincidere. La principale criticità di questo approccio è la ricerca del giusto matching con le opzioni disponibili sul mercato in quanto non sono sempre disponibili e liquidi strumenti con lo strike e la scadenza desiderata. Anche in caso di perfetto matching, anche lo spread tra bid ed ask, in questo mercato, risulta essere spesso significativo soprattutto in riferimento ad azioni di medio-bassa capitalizzazione e per scadenze prolungate. Questo rende spesso necessario il ricorso a tecniche di interpolazione o modellizzazione della *volatility surface* capaci di considerare correttamente fenomeni empirici quali il *volatility smile* ed il *volatility smirk* come in Stoimenov e Wilkens, 2005, Wilkens, Erner e Röder, 2003.

Pur su un numero decisamente minore di prodotti, in Viganò et al., 2019, per il processo di pricing viene proposto una differente metodologia basata sul metodo Monte Carlo permettendo così di valutare il prezzo del certificato sulla base dei flussi di cassa scontati riconosciuti all'investitore secondo un set di scenari che interessano l'andamento dei sottostanti. Nell'ambito del loro lavoro, in riferimento ai tre certificati prezzati, gli autori hanno riscontrato delle significative differenze tra il valore stimato ed il prezzo a cui storicamente è stato scambiato lo strumento riscontrando inoltre che, l'utilizzo del tasso privo di rischio della BCE (a 6 mesi ed a 1 anno) come drift anziché il rendimento realizzato dai diversi sottostanti nel breve e nel medio termine, favorisce un migliore adattamento delle stime. In tutti i casi, la scelta di σ è sempre ricaduta sulla volatilità storica registrata dal sottostante negli ultimi cinque anni.

Una formulazione più raffinata viene invece presentato nel recente lavoro di Guidolin, Leonetti, Pedio, 2024 in cui vengono presentati una serie di processi stocastici che governano l'evoluzione del prezzo dei sottostanti che includono anche salti di varianza e di prezzo modellati mediante dei processi "*à la Poisson*" al fine di catturare alcune caratteristiche empiriche tipiche dei mercati finanziari. Tale lavoro di ricerca non presenta alcun confronto del prezzo così ottenuto con il prezzo di borsa in quanto lo studio si pone l'obiettivo di indagare se tali prodotti possono dirsi utili in un'ottica di portafoglio anche per investitori razionali e perfettamente informati caratterizzati da differenti gradi di avversione al rischio. I parametri ed i rispettivi valori non derivano da stime fornite dagli stessi autori ma fanno riferimento a quanto pubblicato da Dufays, Jacobs, Liu, e Rombouts, 2024.

1.5. L'obiettivo della tesi

Il principale obiettivo della tesi è quello di applicare questo tipo di analisi al mercato italiano per il quale, ad oggi, non esistono ancora studi che abbiano verificato le evidenze empiriche riscontrate in altri mercati europei e statunitensi. Si tratta di un aspetto di grande interesse in quanto, come già sottolineato,

il mercato italiano si conferma leader in termini di volumi negoziati. In tale mercato è attiva una grande varietà di emittenti, che comprende operatori italiani (Intesa Sanpaolo, Unicredit, Mediobanca, Banca Akros), operatori continentali specializzati nell'ambito dei prodotti strutturati e derivati (Marex Financial, Natixis, Leonteq, Vontobel) oltre alle principali banche d'investimento globali (Citigroup, Goldman Sachs, Société Générale, BNP Paribas). Il presente lavoro si colloca in una prospettiva di analisi volta a comprendere le principali determinanti del misspricing nei prodotti strutturati. In particolare, si cercherà di verificare se alcune strutture di payoff siano sistematicamente meno vantaggiose di altre o se vi siano degli emittenti che propongono dei prezzi meno favorevoli rispetto alla media di mercato valutando, in tal caso, possibili legami con il rischio di credito associato. Dopo aver stimato il markup medio di mercato, dei singoli emittenti e delle diverse strutture di payoff al momento dell'emissione, l'analisi si propone di esaminare l'evoluzione dei costi impliciti lungo il ciclo di vita dei prodotti, verificando se anche nel mercato italiano sia riscontrabile la Life Cycle Hypothesis, già documentata in altri contesti europei e statunitensi e se sono riscontrabili politiche di pricing sistematicamente differenti tra i diversi emittenti. Un'attenzione specifica sarà dedicata ai certificati Maxi Cedola. In particolare, si intende verificare se il vantaggio fiscale associato a tali strumenti si traduca in una maggiore capacità, da parte degli emittenti, di applicare costi impliciti addizionali, soprattutto nelle primissime fasi del ciclo di vita in cui tale effetto si concretizza. L'analisi prosegue con uno studio econometrico delle determinanti del markup nel mercato secondario, finalizzato a isolare il contributo di variabili quali il profilo di rischio dello strumento, il dividend yield dei sottostanti, la complessità strutturale del prodotto e il rischio di credito dell'emittente. L'obiettivo ultimo dell'elaborato consiste nel verificare se l'entità del markup rilevato risulti predittiva dei rendimenti futuri risk-adjusted dell'investitore, valutando attraverso un approccio di portfolio sorting se i certificati caratterizzati da costi impliciti più contenuti offrano, sistematicamente, performance superiori rispetto a prodotti analoghi per struttura e profilo di rischio ma caratterizzati da un markup più elevato.

Capitolo 2. Aspetti Metodologici

Dopo aver compreso le caratteristiche essenziali degli investment certificates, l'eterogeneità degli strumenti disponibili nonché le principali questioni teoriche, metodologiche ed operative emerse nel dibattito accademico, il presente capitolo si concentrerà sugli aspetti metodologici legati alla valutazione dei certificati di investimento proponendo una metodologia di pricing, una stima del markup intrinseco alle diverse tipologie di prodotti, nonché una misura di rischio time-varying $\mathfrak{R}_t$ che si pone l'obiettivo di descrivere nel continuo il rischio di mercato dello strumento.

2.1. Dati e highlights dell'analisi

In merito ai dati impiegati nell'analisi empirica, le serie storiche relative ai prezzi di mercato giornalieri dei certificati di investimento sono state acquisite tramite la piattaforma *Refinitiv Eikon* di *LSEG Data & Analytics*. La stessa fonte è stata utilizzata anche per l'estrazione della serie storica giornaliera dei prezzi dei **336 sottostanti** considerati nell'analisi tra lunedì 4 gennaio 2016 e giovedì 19 giugno 2025, così come per la serie storica del tasso risk free, rappresentato dal rendimento dei titoli di stato tedeschi a 3 mesi e le quotazioni dei *Credit Default Swap* (CDS) quinquennali degli emittenti. Per quanto riguarda il dato del dividend yield e del numero di azioni in circolazione, necessario per la stima della capitalizzazione di mercato dei sottostanti, sono stati utilizzati rispettivamente i dati messi a disposizione dai portali di informazione finanziaria *Investing.com* e *Yahoo Finance*. Le quotazioni dei CDS ed il dato del numero di azioni in circolazione per i diversi sottostanti non sono stati utilizzati nella fase di pricing ma unicamente nelle successive fasi di analisi.

Nel corso dell'analisi vengono considerati **1'235 certificati** emessi da **12 emittenti** e negoziati nei comparti EuroTLX e SeDeX di Borsa Italiana la cui data di emissione è compresa tra lunedì 10 agosto 2020 e giovedì 19 giugno 2025 rappresentativi di **373'144 rilevazioni giornaliere** del differenziale tra prezzi di mercato e valori teorici stimati tramite il framework proposto. Nella **Tabella 2.1** viene presentata la disaggregazione dei certificati considerati all'interno dell'analisi per emittente e per struttura di payoff. Le caratteristiche contrattuali necessarie alla replica degli stessi sono state ottenute dalla documentazione ufficiale messa a disposizione sui siti degli emittenti rappresentata dal *KID* e dei "*Final Terms*".

Tabella 2.1 – Classificazione dei certificati considerati nell'analisi²²

Macro-Categoria / Struttura	Emittente											Totale	
	Banca Akros	BNP Paribas	Citigroup	Goldman Sachs	Intesa Sanpaolo	Leonteq	Marex	Mediobanca	Natixis	Société Générale	Unicredit		Vontobel
AIRBAG													
Airbag	-	18	-	-	-	-	6	-	5	-	22	7	58
ALTRO													
Reverse	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	32	-	32
Shark Fin	-	4	2	-	-	8	-	-	-	-	-	-	14
Twin Win	-	-	4	-	-	-	-	-	-	-	-	-	4
CAPITALE CONDIZIONATAMENTE PROTETTO													
Barrier Discount (1210)	-	-	-	-	-	-	-	1	-	48	-	-	49
Bonus Cap	8	49	-	-	-	2	-	-	-	-	63	-	122
Bonus Certificates (1320)	-	-	-	-	-	-	-	1	-	-	-	-	1
Capped Bonus (1250)	-	-	2	-	-	3	1	-	-	-	-	-	6
Cash Collect	38	36	5	69	21	22	57	57	21	-	98	85	509
Discount Certificates	-	-	-	-	-	-	-	-	-	218	-	-	218
CAPITALE PROTETTO													
Cap. Prot. Senza Partecip.	10	-	-	-	16	1	-	2	-	-	-	-	29
Capped Capital Prot. (1120)	16	-	-	1	13	10	5	7	3	-	1	-	56
Uncapped Capital Prot. (1100)	-	-	-	-	1	-	14	-	1	-	-	-	16
MAXI CEDOLA													
Maxi Cedola	12	33	4	-	-	6	11	5	3	-	15	32	121
Totale	84	140	17	70	51	52	94	73	33	266	231	124	1235

Fonte: elaborazione propria da dati estratti dai prospetti informativi dei certificates in perimetro, consultabili nei siti degli emittenti citati

Tutti i calcoli sono poi stati eseguiti usando MATLAB R2025a installato su un MacBook Air dotato di un processore Apple M1 con 8GB di RAM in esecuzione su Sistema operativo MacOS 14.4.1.

2.2. Il modello di pricing – Overview

Dopo aver enunciato le caratteristiche dei dati utilizzati e le relative fonti, la presente sezione si propone di introdurre il modello di pricing adottato per la valutazione dei certificati di investimento oggetto dell'analisi. Al fine di condurre questo tipo di analisi, viene presentata una metodologia di pricing degli investment certificates alternativa rispetto alla strategia di duplicazione proposta nei principali lavori di ricerca (Stoimenov e Wilkens, 2005; Wilkens, Erner e Röder, 2003; Burth, Kraus e Wohlwend, 2001; Hernandez et al., 2007; Baule, 2011; Schertler, 2016; Jørgensen et al., 2011; Szymanowska, Horst e Veld, 2009). Per quanto a mia conoscenza, si tratta della prima applicazione del metodo Monte Carlo su un campione così ampio di Investment certificates. L'impiego del metodo Monte Carlo, basato sulla generazione di un ampio insieme di scenari stocastici, consente di costruire una misura di rischio time-varying, in grado di monitorare la rischiosità dello strumento lungo l'intero orizzonte temporale. Ciò permette di superare la natura statica delle informazioni disponibili in sede di emissione e di mitigare elementi di opacità informativa coerenti con la strategia di “*shrouding*” descritta in Gabaix e Laibson,

²² La mappatura fa riferimento alla struttura di payoff tipica dei vari certificati. L'ID rappresentato tra parentesi fa riferimento alla tassonomia EUSIPA.

2006, secondo cui gli emittenti introducono deliberatamente complessità strutturale al fine di occultare attributi rischiosi o costi impliciti a investitori miopi o scarsamente informati. L'attuale misura di rischio, inoltre, risulta derivare da modelli troppo semplicistici che tendono a stilizzare la natura del payoff ed i relativi rischi di coda in modo dinamico (Viganò et al., 2019). Nello stesso articolo viene evidenziato come il ricorso al Metodo Monte Carlo consente di stimare direttamente il valore del certificato senza dover prezzare le diverse componenti del portafoglio di replica. Inoltre, come proposto in Henderson e Pearson, 2011, il metodo risulta particolarmente vantaggioso nel caso di prodotti complessi, come quelli che incorporano un cap o opzioni asiatiche, e soprattutto quando sono presenti meccanismi di Autocall o barriere valutate lungo l'intero ciclo di vita del certificato, scenario che rappresenta un aspetto centrale e di rilevante impatto nell'analisi condotta nel presente lavoro. L'approccio metodologico seguito ha consentito di ampliare l'analisi a un campione di dimensioni rilevanti, contraddistinto da un'elevata eterogeneità nelle caratteristiche dei prodotti. Un ulteriore elemento distintivo della metodologia proposta è rappresentato dalla stima della volatilità che, anziché fare ricorso alla volatilità implicita estratta dai prezzi di mercato delle opzioni quotate, implementa un Volatility Ensemble basato su tecniche di blending non lineari coerentemente con alcuni spunti noti in letteratura volti a rappresentare tale variabile come latente e dinamica oltre che caratterizzata da comportamenti differenti in riferimento alle varie scadenze (Andersen et al., 2006, Poon e Granger, 2003) per la quale l'utilizzo congiunto di differenti stimatori storici risulta preferibile rispetto all'adozione di una singola misura di volatilità come evidenziato in Engle e Patton, 2001. Il framework proposto combina in maniera dinamica stimatori storici: volatilità EWMA, (RiskMetrics, 1996), volatilità di lungo periodo e bound storico basato su percentili) con correttivi dipendenti dal tempo a scadenza e dalla distanza del prezzo dallo strike (Rubinstein, 1994, Dumas et al., 1998) con l'obiettivo di estrarre dalle serie storiche dei prezzi dei sottostanti una stima della volatilità *time-dependent* capace di incorporare endogenamente i pattern caratteristici della Volatility Surface quali il volatility smile ed il volatility smirk. Tale impostazione è stata adottata, in primo luogo, in considerazione di un approccio di natura tattica, resosi necessario a fronte dell'indisponibilità di dati giornalieri provenienti dal mercato delle opzioni per tutti i sottostanti analizzati, e, in secondo luogo, in ragione dell'ampiezza e dell'eterogeneità del set di sottostanti considerati, che rende necessario ricorrere a una stima della volatilità estraibile direttamente dalle serie storiche dei prezzi. Tale scelta consente inoltre di mitigare le potenziali distorsioni informative derivanti da spread bid-ask elevati nel mercato delle opzioni (Henderson e Pearson, 2011), fenomeno particolarmente rilevante per sottostanti caratterizzati da bassa capitalizzazione e da limitata liquidità nei mercati dei derivati, (Jørgensen et al., 2011). Tale problematica risulta particolarmente rilevante anche per via del fatto che le scadenze dei certificates non sempre coincidono con le scadenze trimestrali delle opzioni più scambiate e caratterizzate dal maggior *open Interest*. Per catturare i fatti stilizzati osservati nei mercati finanziari, il modello implementa jumps sia nei prezzi dei sottostanti sia nella loro volatilità. In particolare, i salti nei prezzi sono modellati attraverso il modello *double exponential jump diffusion* di Kou, 2002 che integra il framework di Merton, 1976 introducendo una rappresentazione asimmetrica di tali discontinuità. Tale framework, successivamente sviluppato da Kou e Wang, 2004 attraverso l'analisi

delle proprietà e delle implicazioni per il pricing di strumenti con barriera, consente di rappresentare in modo flessibile l'asimmetria delle discontinuità nei prezzi, catturando la tendenza empiricamente documentata dei crash di mercato ad essere più frequenti e severi rispetto ai rally (Ramezani e Zeng, 1998). In riferimento al processo stocastico rappresentativo della volatilità degli asset, tali elementi di discontinuità vengono identificati empiricamente applicando un modello AR(p) alla trasformazione logaritmica della serie storica della volatilità stimata.

Sulla base della probabilità di co-occorrenza di tali shock rilevata nei dati storici, anche nelle simulazioni condotte nel framework metodologico viene proposto tale condizionamento rappresentativo dell'aumento di volatilità che si osserva nelle fasi successive a fenomeni di crash delle quotazioni. Tale interrelazione viene stimata per ogni sottostante a partire dalla serie storica dell'asset e si traduce, nel condizionamento dei jumps di prezzo all'avvento dei jumps in volatilità. Va sottolineato che questa interazione tra prezzi e volatilità non si manifesta soltanto durante le fasi di shock, ma permane anche in condizioni di mercato più stabili. Tale fenomeno, noto anche come leverage effect (Christie, 1992, Engle, Ng, 1993) viene anch'esso considerato nel framework proposto mediante l'introduzione di una correlazione negativa tra le innovazioni browniane che guidano il processo stocastico dei prezzi e quelle associate al processo di volatilità. L'intensità di questo effetto varia tra i diversi sottostanti in perimetro ed è per questo stimata empiricamente, in modo separato per ciascun asset, mediante una regressione sulle serie storiche di prezzi e volatilità.

2.2.1. Sintesi delle principali fasi del processo di Pricing

Il modello di pricing adottato, realizzato mediante un processo sequenziale e reiterato che, stimando la distribuzione probabilistica del valore dei diversi sottostanti a partire dalle rispettive serie storiche va a identificare una serie di flussi di cassa. Tali flussi attualizzati vanno a rappresentare la stima del prezzo del prodotto finanziario in esame in coerenza con il Metodo Monte Carlo (Glasserman, 2004, Boyle 1977, Hull e White, 1988). Tale metodologia può essere sintetizzata in cinque fasi:

- **Fase 1: estrazione della base informativa necessaria per la stima**

La prima fase del modello riguarda la costruzione della base informativa necessaria alla stima dei parametri di mercato e alla successiva simulazione. I sottostanti di un certificato sono spesso quotati in mercati differenti, con calendari di negoziazione e festività non sempre coincidenti. Affinché una giornata di borsa possa essere utilizzata per la stima del modello, è necessario che sia disponibile almeno un prezzo sia per il certificato sia per ciascuno dei sottostanti che lo compongono. Un ulteriore elemento di attenzione è rappresentato dagli eventi straordinari che possono interessare i diversi sottostanti come, ad esempio, frazionamenti azionari, raggruppamenti e dividendi straordinari. In questi casi, seppur circoscritti, si è resa necessaria una forzatura manuale del *prezzo di Settlement* K_i svincolando tale input

dall'effettivo prezzo registrato dai sottostanti nel giorno di emissione dello strumento²³. Tutti i livelli di prezzo rilevanti alla determinazione dei flussi di cassa del certificate (e.g. livelli di Autocall, livelli di barriera, livelli di pagamento dei premi condizionati), sono ottenuti a partire da questo sulla base di quanto definito dalla contrattualistica dello strumento stesso.

- **Fase 2: stima dei parametri**

La seconda fase ha l'obiettivo di derivare dalla serie storica dei sottostanti i parametri necessari alla generazione degli scenari simulati. Questa stima avviene su base giornaliera, utilizzando l'informazione disponibile fino a quel momento, al fine di stimare in modo dinamico e privo di *look-ahead bias* la volatilità dei diversi sottostanti e gli altri parametri funzionali a condurre le simulazioni alla base del Metodo Monte Carlo. La struttura di correlazioni è stimata mediante finestre rolling a venti giorni al fine di catturare la natura time-varying di queste interdipendenze (Engle, 2002, Tse e Tsui, 2002). L'approccio adottato implementa il metodo stationary bootstrap proposto da Politis e Romano, 1994, secondo cui vettori di correlazione sono estratti casualmente dalla distribuzione empirica storica e mantenuti per blocchi di durata stocastica. Tale metodologia garantisce che le simulazioni riflettano sia gli stati di correlazione più frequenti sia quelli estremi tipicamente associati a condizioni di stress finanziario (Longin e Solnik, 2001). Queste informazioni in merito a volatilità e correlazioni vengono successivamente combinate (sempre su base quotidiana) con lo scopo di calcolare la matrice di covarianza Σ_t alla base della simulazione stocastica dell'evoluzione dei prezzi.

Oltre a questi parametri che vengono stimati quotidianamente, il modello di simulazione si serve di ulteriori parametri strutturali che regolano la dinamica dei Jumps. La modellazione dei jump di volatilità si fonda sull'evidenza empirica secondo cui incrementi repentini di volatilità tendono a manifestarsi in concomitanza con shock negativi significativi nei prezzi (Eraker et al., 2003, Bates, 2000). Il framework adottato identifica tali episodi mediante un approccio in due fasi: in primo luogo mediante l'applicazione di un modello autoregressivo AR(p) ai logaritmi della volatilità EWMA stimata, selezionando l'ordine p mediante il criterio informativo di Akaike, 1973. Successivamente, vengono identificate le finestre di escalation in concomitanza dei casi in cui i residui standardizzati eccedono la soglia critica di quattro deviazioni standard. L'ampiezza dei jumps viene modellata mediante una distribuzione gamma i cui parametri vengono stimati a partire dalla distribuzione empirica delle variazioni di volatilità osservate in occasione delle finestre di escalation storiche $\mathcal{W}$ in coerenza con i pattern documentati in Todorov e Tauchen, 2011. Una ulteriore caratteristica del modello proposto è rappresentata dall'introduzione di una dipendenza stocastica tra jumps di prezzo e jumps di volatilità (Duffie et al., 2000, Eraker et al., 2003). Il framework prevede che un jump negativo nei prezzi aumenti la probabilità di un jump di volatilità nella stessa finestra temporale. Tale probabilità condizionata è stimata empiricamente per

²³ In questo caso si è fatto riferimento alle informative "Adjustment Rules" pubblicate dai diversi emittenti in occasione di tali eventi straordinari, nelle quali vengono riportati i nuovi prezzi trigger rettificati e, più in generale, tutte le modalità di aggiustamento dei parametri del certificato.

ciascun sottostante, analizzando la co-occorrenza storica p_k^{IW} tra eventi estremi nei rendimenti e finestre di escalation $\mathcal{W}$ della volatilità, catturando così la natura di tale interdipendenza. Completano la parametrizzazione il tasso risk free osservato quotidianamente dal tasso di interesse offerto dalle obbligazioni tedesche con scadenza tre mesi oltre che il dividend yield degli asset sottostanti. Quest’ultimo dato, si assume come costante per tutto il periodo di analisi.

- **Fase 3: Simulazione Monte Carlo**

La terza fase ha l’obiettivo di simulare 200²⁴ possibili scenari futuri dei diversi sottostanti mediante il metodo Monte Carlo. A differenza delle opzioni europee, i certificati di investimento, essendo degli strumenti path-dependent, necessitano di considerare l’intera evoluzione temporale dei sottostanti e non solo il valore a scadenza (Broadie e Glasserman, 1997). L’orizzonte temporale si estende dalla data di valutazione corrente fino alla scadenza del certificato con discretizzazione giornaliera ($\Delta t = \frac{1}{252}$). Tale iter simulativo viene ripetuto per ogni giorno t che intercorre tra la data di emissione t_0 del certificato e l’ultimo dato storico disponibile T (data di scadenza del certificato per gli strumenti con scadenza antecedente a giovedì 19 giugno 2025 e quest’ultima giornata per i certificati ancora negoziati). Al fine di introdurre la correlazione tra i sottostanti, a partire dalla matrice di covarianza stimata Σ_t si fa ricorso alla decomposizione di Cholesky (Glasserman, 2004).

Partendo da variabili casuali $Z_{ind} \sim \mathcal{N}(0,1)$, queste vengono trasformate in variabili casuali correlate $Z_{corr} = L_t \cdot Z_{ind}$. Con lo scopo di garantire la confrontabilità tra i diversi certificates analizzati e isolare la componente di rischio idiosincratca, l’indice Standard & Poor’s 500, $Z_{ind(sp500)}$ viene simulato una sola volta utilizzando un seed fisso. L’andamento dei singoli sottostanti viene poi simulato condizionatamente a quest’ultimo facendo ricorso alla struttura di correlazione stimata che verrà illustrata nelle prossime sezioni.

Il processo di simulazione si articola essenzialmente in due equazioni stocastiche che governano congiuntamente l’evoluzione dei prezzi e della volatilità di ciascun sottostante:

Evoluzione volatilità:

$$d\sigma_t^2 = \kappa(\theta - \sigma_t^2) dt + \sigma^\sigma \sigma_t dW_t^\sigma + J_t^\sigma dN_t^\sigma \quad (1)$$

La volatilità non risulta per questo essere un parametro costante ma il modello implementa un processo che riprende la struttura “mean reverting” della volatilità (Heston, 1993) introducendo inoltre la già introdotta possibilità di osservare repentini incrementi di volatilità.

Il termine κ rappresenta la velocità di mean reversion, θ rappresenta la volatilità media di lungo periodo, σ^σ rappresenta la volatilità della volatilità, dW_t^σ rappresenta l’incremento del moto browniano alla base del processo stocastico che governa la volatilità del sottostante, dN_t^σ rappresenta l’incremento di un

²⁴ Seppur un numero maggiore di simulazioni sarebbe stato auspicabile per ridurre l’intervallo di confidenza delle stime di prezzo, si è dovuto fare ricorso ad un approccio più conservativo limitandone il numero per via di vincoli computazionali.

processo “à la Poisson” che assume valore 1 se si verifica un salto nell’intervallo dt e 0 altrimenti, J_t^σ definisce l’ampiezza dei Jumps di volatilità.

Evoluzione prezzo:

$$dS_t = S_t \left[(r_{adj,t} - div_yield)dt + \sigma_t dW_t + (e^{J_t^\uparrow} - 1) dN_t^\uparrow + (e^{J_t^\downarrow} - 1) dN_t^\downarrow \right] \quad (2)$$

dove r_{adj} rappresenta il tasso di interesse risk free sottratto dal termine di correzione del drift dovuto ai Jumps²⁵, div_yield rappresenta il dividend yield del sottostante, S_t rappresenta il prezzo del sottostante al tempo t , σ_t rappresenta la volatilità stocastica al tempo t così come ottenuto nell’**Equazione 1** dW_t rappresenta l’incremento del moto browniano alla base del processo stocastico che governa il prezzo del sottostante²⁶, $J_t^\uparrow, J_t^\downarrow$ rappresentano l’ampiezza dei salti discreti nel prezzo del sottostante al rialzo ed al ribasso, $dN_t^\uparrow, dN_t^\downarrow$ rappresentano gli incrementi del processo di Poisson che assumono valore 1 nel caso in cui si verifica un salto nell’intervallo dt e 0 altrimenti.

I processi stocastici evidenziati nelle **Equazione 1** ed **Equazione 2** vengono utilizzati per i diversi sottostanti.

Per ogni certificato, si ottiene così una matrice tridimensionale $\mathbb{S} \in R^{m \times t_K \times i}$ che raccoglie, per ciascun sottostante $i = 1, \dots, n$ i prezzi simulati nello scenario $m = 1, \dots, 200$ dove t_K rappresenta i giorni dalla data di valutazione alla scadenza del prodotto.

Per ogni data t compresa tra la data di valutazione corrente t_0 e l’ultima rilevazione storica disponibile T è prevista una matrice tridimensionale $\mathbb{S}$.

• Fase 4: Valutazione dei payoff

Al fine di valutare i flussi di cassa di ogni certificato e per ogni data di valutazione t_k , i prezzi della matrice tridimensionale $\mathbb{S}$ vengono normalizzati rispetto al prezzo strike K_i rappresentativo del prezzo di chiusura dei vari sottostanti nella Settlement Date.

$$P_{i,t}^{(m)} = \frac{S_{m,t,i}}{K_i}, \quad i = 1, \dots, I, \quad t = 1, \dots, T, \quad m = 1, \dots, 200 \quad (3)$$

Consentendo così di identificare per ogni scenario e per ogni data di valutazione il sottostante worst performer del certificato:

$$P_{\text{worst},t}^{(m)} = \min_{i=1,\dots,I} P_{i,t}^{(m)} \quad (4)$$

²⁵ Il termine di correzione citato è rappresentato da $\lambda_{up}\kappa_{up} - \lambda_{down}\kappa_{down}$ che rappresenta il contributo atteso dei salti. $\kappa_{up}/\kappa_{down}$ rappresentano la variazione attesa di prezzo nel caso di un singolo Jump mentre $\lambda_{up}/\lambda_{down}$ la frequenza attesa annualizzata di tali eventi.

²⁶ Gli incrementi dW_t sono generate a partire dalle variabili casuali Z_{corr} ottenute tramite la decomposizione di Cholesky della matrice di covarianza stimata.

A partire da $P_{\text{worst},t}^{(m)}$ vengono computati i flussi di cassa CF_{t_j} confrontando tale prezzo riscalato con i valori trigger previsti contrattualmente, individuati nella **fase 1** (trigger Autocall, trigger pagamento cedola, soglia di barriera). In riferimento al pagamento delle cedole condizionate, per ogni giorno di pagamento cedola si verifica se $P_{\text{worst},t}^{(m)}$ risulta essere superiore al livello di trigger. Questo livello, così come l'ammontare CPN_{t_j} può variare nel corso della vita dello strumento finanziario così come previsto da contratto. In riferimento ai certificati dotati di clausola “Memory”, nel caso in cui questa condizione venga rispettata, vengono riconosciute all'investitore anche eventuali cedole precedenti non erogate.

$$CF_{\text{coupon},t_j}^{(m)} = CPN_{t_j} \cdot \mathbb{1}_{\{P_{\text{worst},t_j}^{(m)} \geq \text{Trigger_CPN}_{t_j}\}} \quad (5)$$

Nelle date di valutazione del rimborso anticipato, si verifica se $P_{\text{worst},t_j}^{(m)}$ risulta essere superiore al livello di trigger di rimborso anticipato $\text{Trigger}_{\text{Autocall},t_j}$. In questo caso viene riconosciuto all'investitore il valore nominale VN dello strumento ed un'ultima cedola CPN_j . Questo evento determina la definitiva l'estinzione del certificate.

$$CF_{\text{autocall},t_j}^{(m)} = (VN + C_j) \cdot \mathbb{1}_{\{P_{\text{worst},t_j}^{(m)} \geq \text{Trigger}_{\text{Autocall},t_j}\}} \cdot \prod_{k=1}^{j-1} \mathbb{1}_{\{P_{\text{worst},t}^{(m)} < \text{Trigger}_{\text{Autocall},t_j}\}} \quad (6)$$

Per gli scenari m in cui non si sono verificati eventi Autocall, il valore di rimborso a scadenza viene determinato in relazione al valore di $P_{\text{worst},T}^{(m)}$ nel giorno di scadenza del certificato T .

Le possibili funzioni che legano $P_{\text{worst},T}^{(m)}$ e $CF_{\text{maturity},T}^{(m)}$ variano significativamente in base alle caratteristiche del prodotto. Di seguito viene riportato il caso base in riferimento ad una classica struttura Autocallable con protezione condizionata del capitale e barriera europea.

$$CF_{\text{maturity},T}^{(m)} = VN \cdot \left[\mathbb{1}_{\{P_{\text{worst},T}^{(m)} \geq \text{Barrier}\}} + P_{\text{worst},T}^{(m)} \cdot \mathbb{1}_{\{P_{\text{worst},T}^{(m)} < \text{Barrier}\}} \right] \cdot \prod_{j=1}^{n_{\text{obs}}} \mathbb{1}_{\{P_{\text{worst},t}^{(m)} < \text{Trigger}_{\text{Autocall},t_j}\}} \quad (7)$$

Per ciascuno scenario m e per ciascuna data di osservazione t_j , tali flussi di cassa vengono infine aggregati.

$$CF_{t_j}^{(m)} = CF_{\text{autocall},t_j}^{(m)} + CF_{\text{coupon},t_j}^{(m)} + CF_{\text{maturity},T}^{(m)} \cdot \mathbb{1}_{\{t_j=T\}} \quad (8)$$

- **Fase 5: Attualizzazione dei flussi di cassa e calcolo del valore teorico**

Dopo aver determinato i flussi di cassa in riferimento a tutti gli scenari $CF_j^{(m)}$, al fine di determinare il valore teorico del prodotto, questi devono essere attualizzati al tasso risk free che, come anticipato, è rappresentato dal rendimento dei titoli di stato tedeschi con scadenza a tre mesi. Per ogni data di osservazione t_j il fattore di sconto DF viene calcolato assumendo una yield curve flat ed utilizzando la convenzione Act/365.

$$DF(t, t_j) = \frac{1}{(1+r_{ft})^{((t_j-t)/365)}} \quad (9)$$

Il valore attuale per ciascuno scenario m viene ottenuto sommando tutti i flussi di cassa attualizzati.

$$V_t^{(m)} = \sum_{j=1}^{n_{obs}} CF_{t_j}^{(m)} \cdot DF(t, t_j) \quad (10)$$

Il prezzo teorico del certificato, alla data di valutazione th viene infine calcolato come media aritmetica dei valori attuali di tutte le m simulazioni.

$$V_t^{MC} = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M V_t^{(m)} \quad (11)$$

- **Struttura iterativa**

Il processo descritto dalla **fase 3** alla **fase 5** viene reiterato per ogni giorno di borsa aperta compreso tra il giorno di emissione t_0 del certificato e l'ultima rilevazione storica disponibile T (giovedì 19 giugno 2025 per i certificati ancora in fase di negoziazione o la data di scadenza per i certificati già rimborsati). La stima dei parametri citati viene aggiornata per ogni data t_h utilizzando solo i dati fino a quel momento disponibili. Anche le successive fasi vengono riperformate con lo scopo di generare la serie storica dei prezzi teorici $\{V_t^{h,MC}\}_{t=1}^T$ direttamente confrontabile con il prezzo di mercato storicamente osservato $\{P_t^{h,mercato}\}_{t=1}^T$.

Questa stima, basata sulla distribuzione empirica di possibili scenari futuri fornisce una base informativa che ben si presta ad essere utilizzata per condurre analisi di diverso tipo in particolare al fine di analizzare il markup implicito a questo genere di prodotti in riferimento ad ogni giornata di negoziazione t . Si definisce per questo la stima del Markup implicito Π_t come la differenza percentuale tra il prezzo teorico stimato dello strumento $V_t^{h,MC}$ ed il prezzo di mercato osservato $P_t^{h,mercato}$ normalizzato rispetto allo stesso prezzo di mercato in linea da quanto proposto in [Stoimenov e Wilkens, 2005](#):

$$\Pi_t = \frac{V_t^{h,MC} - P_t^{h,mercato}}{P_t^{h,mercato}}, \quad \forall t \in \{t_0, \dots, T\}. \quad (12)$$

Inoltre, si definisce il markup implicito annualizzato Π_t^{Ann} al fine di confrontare tale sovrapprezzo tra certificati caratterizzati da scadenze differenti come:

$$\Pi_t^{Ann} = (1 + \Pi_t)^{\frac{1}{(T-t_h)/365}} - 1, \quad \forall t_h \in \{t_0, \dots, t_H\} \quad (13)$$

2.3. Il modello di Pricing: approfondimento sulle scelte modellistiche

Dopo aver fornito una vista d'insieme del modello di pricing adottato, descrivendo il flusso logico e le scelte modellistiche più ad alto livello, la presente sezione si propone di approfondire le ipotesi e le scelte implementative fondanti.

2.3.1. La volatilità

La volatilità rappresenta senz'altro il parametro più sensibile e critico nella valutazione dei certificati di investimento. Come anticipato, questa stima rappresenta uno degli aspetti distintivi della metodologia proposta. Aniché ricorrere alla volatilità implicita, al fine di ottenere una proxy della volatilità time-dependend in grado di considerare anche la *moneyness*, si è preferito partire dalla serie storica dei sottostanti.

1. Volatilità a breve termine

Il primo step della metodologia proposta consiste nella modellazione dei cluster di volatilità mediante l'approccio Exponentially Weighted Moving Average (EWMA). Partendo dalla serie storica di ciascun sottostante, si calcolano i log-rendimenti

$$r_{i,t} = \ln \left(\frac{S_{i,t}}{S_{i,t-1}} \right) \quad (14)$$

successivamente viene calcolata in maniera ricorsiva la varianza EWMA utilizzando un decay factor $\lambda=0,99$.

$$\sigma_{i,t}^2 = \lambda \cdot \sigma_{i,t-1}^2 + (1 - \lambda) \cdot r_{i,t-1}^2 \quad (15)$$

La volatilità giornaliera viene poi annualizzata mediante la seguente trasformazione. Si ottiene in questo modo la volatilità EWMA annualizzata considerando i circa 252 giorni di borsa aperta/anno.

$$\sigma_{i,t}^{\text{EWMA}} = \sqrt{\sigma_{i,t}^2 \cdot 252} \quad (16)$$

Al fine di ridurre il rumore derivante da singole osservazioni ma preservando allo stesso tempo la giusta reattività della stima, tale serie storica viene smussata tramite una media mobile a cinque giorni ottenendo, in questo modo, una prima stima della volatilità “di breve termine”

$$\sigma_{i,t}^{\text{EWMA,ST}} = \frac{1}{5} \sum_{k=0}^4 \sigma_{i,t-k}^{\text{EWMA}} \quad (17)$$

2. Volatilità di lungo periodo

Non è solo la volatilità di breve termine a rappresentare l'unica stima utile. Al fine di identificare una stima di volatilità adeguata in riferimento ai certificati caratterizzati da scadenze medio-lunghe risulta necessario catturare un ulteriore componente di volatilità “di fondo”, meno influenzata dagli accadimenti di breve periodo. Questo viene fatto mediante il ricorso ad una rolling standard deviation annualizzata su un periodo di 1000 giorni (circa 4 anni di negoziazione) e alla successiva estrazione del decimo percentile.

$$\sigma_{i,t}^{\text{LT}} = \sqrt{252} \cdot \text{std}(\{r_{i,\tau}\}_{\tau=t-999}^t) \quad (18)$$

$$\sigma_{i,t}^{\text{struct}} = \text{percentile}_{10\%}(\{\sigma_{i,\tau}^{\text{LT}}\}_{\tau=t-999}^t) \quad (19)$$

3. Correzione dinamica legata al time to maturity

La misura di volatilità di sintesi utile per la simulazione dell'andamento dei diversi sottostanti deve necessariamente tenere in considerazione i giorni $\mathcal{T}$ che mancano alla scadenza del certificate. Per scadenze brevi, un buon proxy della volatilità implicita può essere rappresentato da $\sigma_{i,t}^{\text{EWMA,ST}}$ mentre, per orizzonti temporali più lunghi, risulta opportuno fare ricorso a $\sigma_{i,th}^{\text{struct}}$. Si identifica in $\mathcal{T}_{\text{threshold}}$ la soglia, fissata a 90 giorni, alla quale avviene la transizione da lungo a breve periodo. Per $\mathcal{T} > \mathcal{T}_{\text{threshold}}$ viene applicato un ulteriore fattore di scala lineare che riduce progressivamente la volatilità nell'intervallo temporale tra tale scadenza e $\mathcal{T} = 1000$. Tale fattore correttivo è compreso tra 0,9 ($f_{\min}$) e 1 ($f_{\max}$).

A questo fine, oltre che per garantire una transizione non discontinua tra questi due regimi, viene proposto il seguente blending dinamico, i cui pesi sono individuati come:

$$w_{\text{short}}(\mathcal{T}) = \begin{cases} e^{-\frac{\ln(1/0.3)}{\mathcal{T}_{\text{threshold}}}\mathcal{T}} & \text{se } \mathcal{T} \leq \mathcal{T}_{\text{threshold}} \\ 0.3 & \text{se } \mathcal{T} > \mathcal{T}_{\text{threshold}} \end{cases}, \quad w_{\text{long}}(\mathcal{T}) = 1 - w_{\text{short}}(\mathcal{T}) \quad (20)$$

$$f_{\text{scale}}(\mathcal{T}) = \begin{cases} f_{\min} + (f_{\max} - f_{\min}) \cdot \frac{1000 - \mathcal{T}}{1000 - \mathcal{T}_{\text{threshold}}}, & \text{se } \mathcal{T}_{\text{threshold}} \leq \mathcal{T} \leq 1000 \\ f_{\max}, & \text{se } \mathcal{T} < \mathcal{T}_{\text{threshold}} \\ f_{\min} & \text{se } \mathcal{T} > 1000 \end{cases} \quad (21)$$

In questo modo risulta possibile derivare la misura di sintesi della volatilità da utilizzare nel caso in cui sottostante risulti at the money.

$$\sigma_{i,t}^{\text{ATM}} = w_{\text{short}} \cdot \max(\sigma_{i,t}^{\text{EWMA,ST}}, \sigma_{i,t}^{\text{struct}}) + w_{\text{long}} \cdot \min(\sigma_{i,t}^{\text{EWMA,ST}}, \sigma_{i,t}^{\text{struct}}) \quad (22)$$

$$\sigma_{i,t}^{\text{corrected}} = \sigma_{i,t}^{\text{ATM}} \cdot f_{\text{scale}}(\mathcal{T}) \quad (23)$$

4. Correzione Moneyness

È noto che la volatilità implicita delle opzioni, oltre che dal time to maturity, è ampiamente influenzata anche dal grado di Moneyness m ovvero la distanza tra il prezzo corrente $S_{i,t}$ del sottostante e lo strike price K_i . Si definisce il grado di moneyness come $m_{i,t} = \frac{S_{i,t}}{K_i}$.

Nello specifico, la volatilità implicita aumenta all'aumentare della distanza di $S_{i,t}$ da K_i con un minimo in prossimità di valori di moneyness prossimi a $m \approx 1,05$ (m_0). Tale crescita risulta generalmente più accentuata nella regione in cui le opzioni si trovano out of the money ($m < 1$ nel caso delle opzioni call) mentre un effetto decisamente meno significativo lo si rileva nella nell'intervallo compreso tra $m = 0,85$ ($m_{\text{flat,min}}$) e $m = 1,20$ ($m_{\text{flat,max}}$) come rappresentato in [Erzegovesi, Beber, 1999](#) e [Bekaert, Wu, 2000](#). Tali fenomeni risultano essere inoltre time-dependent in quanto, tali effetti risultano amplificati al decrescere di $\mathcal{T}$. Non prendere in considerazione tutto ciò condurrebbe ad approssimazioni eccessive. A tal fine si definisce:

$$\Delta\sigma_{\text{raw}}(m) = 1 - e^{-\alpha(m-m_0)^2} \quad (24)$$

Dove $\alpha = 20$ rappresenta una variabile di controllo che si presta a regolare l'ampiezza della funzione. Con lo scopo di regolare l'asimmetria tra i due rami del Volatility smile viene proposta la seguente correzione:

$$\Delta\sigma(m) = \begin{cases} \Delta\sigma_{\text{raw}}(m) & \text{se } m \leq 1.05 \\ \frac{\Delta\sigma_{\text{raw}}(m)}{2} & \text{se } m > 1.05 \end{cases} \quad (25)$$

Al fine di evitare correzioni eccessive nell'area compresa tra $m_{\text{flat,min}}$ e $m_{\text{flat,max}}$

$$\text{flat}(m) = \frac{1}{1+e^{-\kappa(m-m_{\text{flat,min}})}} \times \left(1 - \frac{1}{1+e^{-\kappa(m-m_{\text{flat,max}})}}\right) \quad (26)$$

Il parametro κ , funzionale a regolare la rapidità della transizione tra la zona flat ed i valori m esterni è fissato in 15. Si ricava in questo modo la componente correttiva della volatilità imputabile esclusivamente al Moneyness m .

$$\Delta\sigma_{\text{adj}}(m) = \Delta\sigma(m) \times (1 - \text{flat}(m)) \quad (27)$$

Al fine di catturare anche la dinamica time-dependent si introduce il peso w_{smile} funzionale a modellare questa ricorrenza empirica. Tale parametro viene definito come:

$$w_{\text{smile}}(\mathcal{T}) = 0,1 + 0,9 \cdot e^{-\mathcal{T}/50} \quad (28)$$

La combinazione di questi effetti è sintetizzabile nel parametro $\Delta\sigma_{\text{offset}}(m, \mathcal{T})$ così definito:

$$\Delta\sigma_{\text{offset}}(m, \mathcal{T}) = \Delta\sigma_{\text{adj}}(m) \cdot \sigma_{i,t}^{\text{corrected}} \cdot w_{\text{smile}}(\mathcal{T}) \quad (29)$$

E la volatilità finale, per ciascun sottostante e per ciascun giorno di analisi secondo quanto introdotto nella **fase 3** sarà per questo definita come:

$$\sigma_{i,t} = \sigma_{i,t}^{\text{corrected}} + \Delta\sigma_{\text{offset}}(m_{i,t}, \mathcal{T}) \quad (30)$$

Stima dei parametri strutturali

Tale volatilità evolverà seguendo il processo stocastico mean reverting di tipo CIR simile alle specificazioni di [Hull e White, 1987](#); [Heston, 1993](#), introdotto nell'**Equazione 1** con lo scopo di integrare all'interno del modello una componente randomica che sappia catturare l'andamento stocastico della volatilità. Tale modello è stato integrato all'interno del framework proposto comprensivo, inoltre, di Jumps nei prezzi e nella volatilità. Escludendo questi shock, la componente di fondo di tale processo può essere discretizzato su base giornaliera $\Delta t = 1/252$ come segue:

$$\sigma_{k,t+1} - \sigma_{k,t} = \kappa_k(\theta_k - \sigma_{k,t})\Delta t + \sigma_k^\sigma \sqrt{\sigma_{k,t}} \varepsilon_{k,t}^\sigma, \quad \varepsilon_{k,t}^\sigma \sim \mathcal{N}(0, \Delta t). \quad (31)$$

Risulta necessario, a tal fine, stimare i parametri strutturali, κ_k , θ_k e σ_k^σ in riferimento a ciascuno degli asset considerati all'interno del perimetro di analisi a partire dalla serie storica di $\sigma_{i,t}$. La stima dei parametri di mean reversion si basa su una regressione lineare della variazione della volatilità sul suo

livello corrente. Si tratta di un approccio originariamente sviluppato per tassi d'interesse (Chan et al., 1992) che viene qui applicato alla dinamica della volatilità implicita in quanto non risulta possibile seguire l'approccio basato sulla calibrazione dai prezzi delle opzioni (Heston, 1993; Bakshi et al., 1997) in quanto questi dati risultano disponibili solo per un sottogruppo molto limitato di asset in perimetro.

Per ciascun sottostante k viene per questo stimata la relazione derivante dalla riformulazione della discretizzazione presentata nell'Equazione 31:

$$\Delta\sigma_{k,t} = \kappa_k(\theta_k - \sigma_{k,t})\Delta t + \varepsilon_{k,t}, \quad (32)$$

dove Δt è il passo temporale e $\varepsilon_{k,t}$ rappresenta il termine di errore.

Il parametro di livello medio θ_k viene stimato direttamente come media storica della volatilità $\sigma_{k,t}$ come:

$$\theta_k = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \sigma_{k,t}. \quad (33)$$

Al contrario, il parametro di velocità di ritorno a lungo termine κ_k viene stimato tramite regressione lineare della variazione della volatilità sullo scostamento dalla media θ_k :

$$\Delta\sigma_{k,t} = \kappa_k(\theta_k - \sigma_{k,t})\Delta t + \varepsilon_{k,t}. \quad (34)$$

Infine, il parametro di volatilità della volatilità σ_k^σ viene stimato a partire dai residui della regressione precedente:

$$\sigma_k^\sigma = \frac{\text{std}(\varepsilon_{k,t}/\sqrt{\sigma_{k,t}})}{\sqrt{\Delta t}} \quad (35)$$

2.3.2. La struttura di correlazioni e la matrice di covarianza

Come già preventivato, nei certificati multi-asset, anche la corretta rappresentazione della struttura di correlazioni tra gli stessi rappresenta un aspetto cruciale. L'approccio proposto, partendo dalle correlazioni tra i sottostanti storicamente osservate, si propone di introdurre nel modello di pricing una struttura delle correlazioni time-varying (Engle, 2002; Tse e Tsui, 2002) senza sacrificare la coerenza con le relazioni tra gli asset storicamente osservate. A tale fine, partendo dalle serie storiche dei rendimenti logaritmici giornalieri $r_{i,t}$ dei κ asset rilevanti in riferimento a ciascun certificato (l'indice di riferimento ed i diversi sottostanti), viene identificata la matrice delle correlazioni empiriche Ψ sulla base di rolling window T_w a 20 giorni.

Per ogni finestra temporale $\tau = 1, \dots, T - T_w + 1$ il coefficiente di correlazione tra l'asset i e l'asset j viene calcolato come:

$$\rho_{ij}(\tau) = \frac{\sum_{t=\tau}^{\tau+T_w-1} (r_{i,t} - \bar{r}_i(\tau))(r_{j,t} - \bar{r}_j(\tau))}{\sqrt{\sum_{t=\tau}^{\tau+T_w-1} (r_{i,t} - \bar{r}_i(\tau))^2} \sqrt{\sum_{t=\tau}^{\tau+T_w-1} (r_{j,t} - \bar{r}_j(\tau))^2}} \quad (36)$$

La matrice Ψ delle correlazioni storiche è costituita raccogliendo, per ogni finestra temporale τ i vettori delle correlazioni tra tutte le coppie di asset:

$$\Psi = \begin{pmatrix} \rho(1)^\top \\ \rho(2)^\top \\ \vdots \\ \rho(t_H - T_w + 1)^\top \end{pmatrix} \in [-1,1]^{(t_H - T_w + 1) \times \frac{\kappa(\kappa-1)}{2}} \quad (37)$$

dove $\rho(t)$ è il vettore delle correlazioni rilevate all'istante t per tutti i coefficienti di correlazione tra le $\frac{\kappa(\kappa-1)}{2}$ coppie di asset. Tale matrice costituisce la distribuzione empirica dalla quale verranno campionate le strutture di correlazione utilizzate nelle simulazioni Monte Carlo.

Al fine di generare sequenze di correlazioni, l'approccio adottato implementa il metodo Stationary Bootstrap proposto da Politis e Romano, 1994. Tale framework introduce una struttura a blocchi stocastici con l'obiettivo di catturare la persistenza temporale delle correlazioni rappresentando inoltre le transizioni tra regimi differenti.

A tal fine, partendo dal primo giorno di simulazione t viene estratto casualmente, con probabilità uniforme, un indice storico τ_1 osservato tra le $t_H - T_w + 1$ rilevazioni storiche disponibili:

$$\tau_1 \sim \text{Distribuzione uniforme discreta}(\mathcal{V}), \quad \mathcal{V} = \{1, 2, \dots, t_H - T_w + 1\}. \quad (38)$$

Per i successivi giorni $\tau_2, \tau_3, \dots, \tau_H$ la sequenza delle strutture di correlazioni viene generata tramite un sistema di blocchi stocastici. In particolare, ciascun blocco prosegue con probabilità $1 - p$ e termina con probabilità $p = 1/\mathbb{E}[L]$, dove $\mathbb{E}[L]$ rappresenta la lunghezza attesa dei blocchi calibrata in 22 giorni, rappresentativa di circa un mese di negoziazione.

A tal fine, si procede ad estrarre $U_t \sim \text{Uniforme}(0,1)$ rappresentativa una variabile casuale indipendente. Qualora $U_t < p$, il blocco viene riavviato e l'indice storico τ_t viene estratto casualmente tra le finestre disponibili $\mathcal{V}$.

$$\tau_t \sim \text{Distribuzione uniforme discreta}(\mathcal{V}), \quad \mathcal{V} = \{1, 2, \dots, t_H - T_w + 1\}. \quad (39)$$

In alternativa, se $U_t \geq p$, il blocco prosegue incrementando l'indice storico del giorno precedente τ_{t-1} . Al fine di garantire che l'indice τ_t rimanga all'interno dell'insieme $\mathcal{V}$ delle finestre disponibili, questo viene aggiornato secondo le seguenti modalità:

$$\tau_t = \begin{cases} \tau_{t-1} + 1, & \text{se } \tau_{t-1} + 1 \in \mathcal{V}, \\ \min(\mathcal{V}), & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (40)$$

Tale meccanismo preserva la stazionarietà della sequenza facendo inoltre sì che la lunghezza dei blocchi risultanti segua, per costruzione, una distribuzione geometrica con media $\mathbb{E}[L] = 1/p$ introducendo variabilità stocastica nella persistenza dei regimi di correlazione.

Per ogni giorno t della simulazione, il vettore di correlazione utilizzato è quindi definito come:

$$\rho^{(t)} = \rho(\tau_t) \in [-1,1]^{\frac{\kappa(\kappa-1)}{2}} \quad (41)$$

dove $\rho(\tau_t)$ denota la riga τ_t -esima della matrice empirica Ψ . Questo approccio garantisce che le correlazioni simulate riflettano fedelmente la distribuzione empirica osservata Ψ , includendo episodi di correlazione estrema tipici delle fasi di stress finanziario evidenziate in [Longin e Solnik, 2001](#). Al contempo, la persistenza dei regimi di correlazione è caratterizzata da una variabilità stocastica, evitando transizioni deterministiche tra stati. Infine, le proprietà di stazionarietà debole risultano preservate per costruzione, assicurando la validità delle inferenze statistiche derivanti dalle simulazioni Monte Carlo ([Politis e Romano, 1994](#)). Le strutture di correlazione più frequentemente osservate nella storia hanno maggiore probabilità di essere selezionate in virtù del campionamento uniforme da Ψ , ma il framework non esclude regimi rari associati a crisi finanziarie. Nell'ambito del modello proposto, tale dinamica risulta indipendente dall'andamento corrente dei prezzi dei sottostanti, non essendo prevista alcuna relazione funzionale diretta tra il vettore $\rho^{(t)}$ estratto e le innovazioni browniane Z^{corr} alla base del processo stocastico dei prezzi.

Avendo in questo modo stimato sia la volatilità degli asset così come la struttura di correlazioni, è possibile calcolare, per ogni giorno di borsa aperta compreso tra il giorno di emissione t_0 , del certificato e l'ultima rilevazione storica disponibile T , la matrice di covarianza Σ_t la cui dimensione dipende dal numero di asset k .

$$\Sigma_{th,k} = \begin{pmatrix} \sigma_{index_t}^2 & \rho_{1,2_t} \sigma_{1_t} \sigma_{index_t} & \cdots & \rho_{1,k_t} \sigma_{k_t} \sigma_{index_t} \\ \rho_{1,2_t} \sigma_{1_t} \sigma_{index_t} & \sigma_{1_t}^2 & \cdots & \rho_{1,k_t} \sigma_{1_t} \sigma_{k_t} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{1,k_t} \sigma_{k_t} \sigma_{index_t} & \rho_{2,k_t} \sigma_{1_t} \sigma_{k_t} & \cdots & \sigma_{k_t}^2 \end{pmatrix} \quad (42)$$

Tale matrice è utilizzata per generare le simulazioni delle traiettorie degli asset alla base del Metodo Monte Carlo. Per catturare la correlazione tra gli asset partendo dalle innovazioni stocastiche del moto browniano geometrico modellate attraverso variabili casuali normali standardizzate $Z_{ind,t,k} \sim \mathcal{N}(0,1)$, si rende necessaria una trasformazione di tali variabili mediante la decomposizione di Cholesky. Per ogni giorno si calcola la matrice triangolare $L_{t,k}$ tale che $\Sigma_{t,k} = L_{t,k} \cdot L_{t,k}^T$ che consente di ottenere delle variabili casuali correlate $Z_{t,k}^{\text{corr}}$ attraverso la trasformazione lineare $L_{t,k} \cdot Z_{ind,t,k}$ come evidenziato in [Glasserman, 2004](#). A questo punto, le variabili casuali correlate Z_{corr} vengono sottoposte al seguente processo di standardizzazione per ogni asset k al fine di accertare che tali variabili mantengano una media pari a zero ed una varianza unitaria.

$$\widetilde{Z}_{t,k}^{\text{corr}} = \frac{Z_{t,k}^{\text{corr}} - \overline{Z_k^{\text{corr}}}}{s_{Z_k^{\text{corr}}}}, \quad k = 1, \dots, \text{numero sottostanti}(I) + 1 \quad (43)$$

Con Z^{corr} che rappresenta la media campionaria di $Z_{t,k}^{\text{corr}}$ e $s_{Z_{t,k}^{\text{corr}}}$ rappresenta la deviazione standard. Le variabili $\widetilde{Z}_{t,k}^{\text{corr}}$ vengono utilizzate come innovazioni browniane nell'ambito del processo stocastico che governa l'evoluzione dei prezzi dei $k - 1$ sottostanti.

Questo fa sì che le traiettorie simulate riflettano simultaneamente le caratteristiche di volatilità e correlazione desiderate.

2.3.3. L'introduzione di "Jumps" nei prezzi

Come anticipato, l'approccio presentato include due differenti tipologie di discontinuità che incidono nei processi stocastici che governano l'evoluzione di prezzi e volatilità.

1. Jumps di prezzo: scelte modellistiche

È noto che i prezzi degli asset azionari presentano discontinuità pronunciate riconducibili sia a fattori esogeni di mercato sia ad eventi societari quali la pubblicazione dei risultati trimestrali o altre informative price-sensitive. La letteratura empirica ha documentato estensivamente che intensità e frequenza di questi shock non sono simmetriche: i ribassi delle quotazioni risultano essere più frequenti e di entità maggiore rispetto ai rapidi rialzi (Ramezani e Zeng, 1998; Kou, 2002). Per incorporare tale asimmetria, oltre che l'eccesso di curtosi e lo skewness negativo caratteristici dei rendimenti azionari, i jump nei prezzi vengono modellati seguendo il double exponential jump-diffusion model proposto da Kou, 2002, che rappresenta un'estensione del framework pioneristico di Merton, 1976).

La calibrazione dei parametri del modello si articola in un processo iterativo volto a separare la componente continua di diffusione browniana dalle discontinuità (jumps). Tale separazione risulta cruciale per evitare distorsioni nella stima della volatilità dovute alla contaminazione da eventi estremi come evidenziato in Barndorff-Nielsen e Shephard, 2006; Aït-Sahalia e Jacod, 2009.

Il procedimento adottato implementa un algoritmo threshold-based volto a stimare la volatilità di diffusione σ_k^{diff} per ciascun asset k partendo dalle serie storiche dei rendimenti logaritmici $r_{k,t}$ con $t = 1, \dots, T_k$. La stima iniziale viene ottenuta mediante la Median Absolute Deviation (MAD) per via del fatto che tale stimatore risulta robusto rispetto agli outlier (Rousseeuw e Croux, 1993) come:

$$\widehat{\sigma_k^{(\ell_0)}} = \frac{\text{MAD}(r_{k,1}, \dots, r_{k,T_k})}{0,6745} \quad (44)$$

dove il fattore di correzione $0,6745^{27}$ garantisce che la stima sia consistente sotto l'ipotesi di normalità della componente diffusiva. Successivamente, viene implementato un algoritmo iterativo che, dopo aver stimato i jumps, stima nuovamente la volatilità. L'identificazione dei jump non avviene tramite una soglia fissata ex-ante, bensì mediante una soglia endogena $c_\alpha(T_k)$ determinata sulla base della distribuzione asintotica dei massimi della statistica dei rendimenti normalizzati. In particolare, seguendo Lee e Mykland, 2008, il massimo dei rendimenti standardizzati $\max_{t=1, \dots, T_k} \left| \frac{r_{k,t}}{\widehat{\sigma_k}} \right|$ converge a una distribuzione di Gumbel, dalla quale si ricava una soglia critica $c_\alpha(T_k)$ al livello di significatività α . In particolare, la

²⁷ La costante 0,6745 deriva dalla relazione tra MAD (mediana degli scarti assoluti dalla mediana) e deviazione standard: per $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\text{MAD}(X_1, \dots, X_n) = \text{mediana}(|X_i - \text{mediana}(X_1, \dots, X_n)|) = \text{mediana}(|X|) = \Phi^{-1}(0,75) \approx 0,6745$. Dividendo la MAD per questo valore si ottiene uno stimatore consistente della deviazione standard σ .

soglia critica $c_\alpha(T_k)$ è ottenuta come il quantile di ordine $\alpha = 0,99$ della distribuzione di Gumbel ed è data da:

$$c_{0,99}(T_k) = b_{T_k} - \frac{1}{a_{T_k}} \log(-\log(0.99)) \quad (45)$$

$$\text{Con} \quad a_{T_k} = \sqrt{2 \log T_k}, \quad e \quad b_{T_k} = a_{T_k} - \frac{\log(\log T_k) + \log(4\pi)}{2a_{T_k}} \quad (46)$$

Per $\ell = 1, 2, \dots$, fino a convergenza, si procede come segue:

1. Normalizzazione dei rendimenti:

$$\widetilde{r}_{k,t}^{(\ell)} = \frac{r_{k,t}}{\sigma_k^{(\ell-1)}} \quad (47)$$

2. Classificazione dei Jumps:

$$\mathcal{J}_{JUMP}^{(\ell)} = \{t: |\widetilde{r}_{k,t}^{(\ell)}| > c_{0,99}(T_k)\} \quad (48)$$

3. Isolamento componente di diffusione:

$$\mathcal{D}^{(\ell)} = \{r_{k,t}: t \notin \mathcal{J}_{JUMP}^{(\ell)}\} \quad (49)$$

4. Nuova stima della volatilità:

$$\widehat{\sigma}_k^{(\ell)} = \text{std}(\mathcal{D}^{(\ell)}) \quad (50)$$

Il processo converge quando $\frac{|\widehat{\sigma}_k^{(\ell)} - \widehat{\sigma}_k^{(\ell-1)}|}{\widehat{\sigma}_k^{(\ell-1)}} < 10^{-6}$ o dopo un massimo di 20 iterazioni. La volatilità di

diffusione finale σ_k^{diff} corrisponde al valore convergente $\widehat{\sigma}_k^{(\ell^*)}$, mentre l'insieme finale dei jump identificati è dato da $\mathcal{J}_k = \{t: |r_{k,t}/\sigma_k^{\text{diff}}| > c_{0,99}(T_k)\}$.

In continuità con [Kou, 2002](#), il modello assume che i jumps nei prezzi seguano due processi di Poisson indipendenti con intensità $\lambda_k^\uparrow$ in riferimento ai jumps positivi e $\lambda_k^\downarrow$ per quanto riguarda i jumps al ribasso. Le ampiezze dei jump sono modellate mediante distribuzioni esponenziali con parametri $\eta_k^\uparrow$ e $\eta_k^\downarrow$, funzionali ad una rappresentazione asimmetrica di tali elementi discontinuità. A partire dall'insieme $\mathcal{J}_k$ dei jump identificati, questi vengono suddivisi in Jumps al rialzo $\mathcal{J}_k^\uparrow$ e jumps al ribasso $\mathcal{J}_k^\downarrow$ sulla base della seguente relazione:

$$\mathcal{J}_k^\uparrow = r_{k,t}: t \in \mathcal{J}_k, r_{k,t} > 0 \quad (51)$$

$$\mathcal{J}_k^\downarrow = r_{k,t}: t \in \mathcal{J}_k, r_{k,t} < 0$$

Le intensità dei processi di Poisson vengono stimate sulla base delle medie dei salti storicamente osservati:

$$\hat{\lambda}_k^\uparrow = \frac{|\mathcal{J}_k^\uparrow|}{T_{\text{years},k}} \quad (52)$$

$$\hat{\lambda}_k^\downarrow = \frac{|\mathcal{J}_k^\downarrow|}{T_{years,k}}$$

dove $T_{years,k}$ rappresenta la lunghezza, in anni, della serie storica disponibile per il sottostante. Per i jump positivi e negativi, assumendo che le ampiezze seguano una distribuzione esponenziale $X \sim \text{Exp}(\eta)$ con $\mathbb{E}[X] = 1/\eta$, gli stimatori di massima verosimiglianza per i parametri $\eta_k^\uparrow$ e $\eta_k^\downarrow$ si ottengono come l'inverso della media dei rispettivi jump osservati:

$$\eta_k^\uparrow = \frac{1}{\bar{J}_k^\uparrow}, \quad \text{con} \quad \bar{J}_k^\uparrow = \frac{1}{|\mathcal{J}_k^\uparrow|} \sum_{r \in \mathcal{J}_k^\uparrow} r \quad (53)$$

$$\eta_k^\downarrow = \frac{1}{\bar{J}_k^\downarrow}, \quad \text{con} \quad \bar{J}_k^\downarrow = \frac{1}{|\mathcal{J}_k^\downarrow|} \sum_{r \in \mathcal{J}_k^\downarrow} |r|$$

è inoltre possibile identificare la probabilità che il jumps sia al rialzo come:

$$\hat{p}_k = \frac{|\mathcal{J}_k^\uparrow|}{|\mathcal{J}_k^\uparrow| + |\mathcal{J}_k^\downarrow|} \quad (54)$$

Per ciascuna simulazione Monte Carlo $m = 1, \dots, M$ e per ogni giorno t , la presenza di un jump viene determinata mediante approssimazione binomiale del processo di Poisson. Per via del fatto che $\lambda_k^{\uparrow/\downarrow} \cdot \Delta t \ll 1$, la probabilità di osservare più di un jump nell'intervallo Δt è trascurabile e questo permette di modellare gli indicatori di occorrenza dei Jump $N_{k,t}^\uparrow$ e $N_{k,t}^\downarrow$ come variabili di Bernoulli partendo dalla generazione di jumps totali.

$$N_{k,m,t}^{\text{tot}} \sim \text{Bernoulli}\left((\lambda_k^\uparrow + \lambda_k^\downarrow) \cdot \Delta t\right) \quad (55)$$

Successivamente, condizionatamente a $N_{k,m,t}^{\text{tot}} = 1$, la direzione del jump viene determinata con probabilità $\hat{p}_k$ per jumps positivi e $1 - \hat{p}_k$ per jumps negativi.

$$B_{k,m,t} \sim \text{Bernoulli}(\hat{p}_k) \quad (56)$$

$$N_{k,m,t}^\uparrow = N_{k,m,t}^{\text{tot}} \cdot B_{k,m,t} \quad N_{k,m,t}^\downarrow = N_{k,m,t}^{\text{tot}} \cdot (1 - B_{k,m,t}) \quad (57)$$

Le ampiezze dei jumps sono generate mediante trasformazione inverse sampling dalle distribuzioni esponenziali osservate empiricamente. Per ogni simulazione e giorno, vengono generate variabili $U_{k,m,t}^\uparrow$ e $U_{k,m,t}^\downarrow \sim \text{Uniforme}(0,1)$, utilizzate per simulare le ampiezze $J_{k,t}^\uparrow$ e $J_{k,t}^\downarrow$.

$$J_{k,m,t}^\uparrow = -\frac{\ln(U_{k,m,t}^\uparrow)}{\eta_k^\uparrow} \quad \text{se } N_{k,m,t}^\uparrow = 1$$

$$J_{k,m,t}^\downarrow = -\frac{\ln(U_{k,m,t}^\downarrow)}{\eta_k^\downarrow} \quad \text{se } N_{k,m,t}^\downarrow = 1 \quad (58)$$

L'introduzione di jump altera il rendimento atteso del processo dei prezzi, richiedendo un aggiustamento del drift per preservare la condizione di neutralità al rischio necessaria per il pricing corretto dei derivati come specificato in [Harrison e Pliska, 1981](#). Sotto la misura risk-neutral $\mathbb{Q}$, il processo dei log-prezzi

deve avere drift pari al tasso r_f . Per jump log-normali $J \sim \mathcal{N}(\mu_J, \sigma_J^2)$, il rendimento percentuale atteso è $\mathbb{E}^\mathbb{Q}[e^J - 1] = e^{\mu_J + \sigma_J^2/2} - 1$. Tuttavia, nel modello Kou con distribuzioni esponenziali, il momento esponenziale è:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}^\mathbb{Q}[e^{J^\uparrow}] &= \frac{\eta_k^\uparrow}{\eta_k^\uparrow - 1}, \text{ per } \eta_k^\uparrow > 1 \\ \mathbb{E}^\mathbb{Q}[e^{J^\downarrow}] &= \frac{\eta_k^\downarrow}{\eta_k^\downarrow + 1}\end{aligned}\tag{59}$$

Il fattore di compensazione complessivo per ciascuna direzione è quindi:

$$\begin{aligned}\kappa_k^\uparrow &= \hat{p}_k \left(\frac{\eta_k^\uparrow}{\eta_k^\uparrow - 1} - 1 \right), \quad \text{se } \eta_k^\uparrow > 1 \\ \kappa_k^\downarrow &= (1 - \hat{p}_k) \left(\frac{\eta_k^\downarrow}{\eta_k^\downarrow + 1} - 1 \right)\end{aligned}\tag{60}$$

Il relativo aggiustamento del drift causato dai jumps di prezzo risulta, per questo:

$$\delta_k^{\text{jump}} = \lambda_k^{\text{tot}} \cdot (\kappa_k^\uparrow + \kappa_k^\downarrow)\tag{61}$$

con $\lambda_k^{\text{tot}} = \lambda_k^\uparrow + \lambda_k^\downarrow$ rappresenta l'intensità totale dei jump. Il drift risk-neutral $\mu_k^\mathbb{Q}$ risultante è quindi individuabile in

$$\mu_k^\mathbb{Q} = r_f - \delta_k^{\text{jump}}\tag{62}$$

2.3.4. L'introduzione di "Jumps" nella volatilità degli asset

Di diversa natura risulta essere l'approccio adottato in riferimento ai Jumps di volatilità che, al fine di identificare gli episodi di escalation, si fonda su una procedura strutturata basata sull'analisi dei residui del modello autoregressivo individuato. A differenza dei jump nei prezzi, che possono essere sia positivi sia negativi, i jumps di volatilità proposti nel presente framework hanno natura unidirezionale e mirano altresì a riflettere la natura asimmetrica della leverage effect documentata in [Bekaert e Wu, 2000](#); [Todorov e Tauchen, 2011](#). La metodologia proposta non risulta essere standard in letteratura in quanto l'obiettivo di questa fase non è puramente quello di stimare i jumps nella volatilità dei rendimenti dei diversi asset ma quella di stimare i jumps nel proxy della volatilità implicita $\sigma_{i,t}$ presentato nel **Paragrafo 2.3.1**. Tale indicatore evidenzia un'elevata autocorrelazione e persistenza temporale rispetto all'evoluzione rolling della deviazione standard dei rendimenti annualizzati osservata per i diversi sottostanti. Nonostante questo, tale proxy non risulta esente da episodi di escalation che, oltre a giustificare la modellazione di tali elementi di discontinuità, richiede di essere trattata prendendo in considerazione le peculiarità dei diversi asset. Per ciascun asset k , a partire dalla serie storica del proxy della volatilità implicita $\{\sigma_{k,t}\}_{t=1}^{T_k}$, stimata tramite la procedura presentata nel **Paragrafo 2.3.1**, si considerano i logaritmi $y_{k,t} = \ln(\sigma_{k,t})$, con l'obiettivo di stabilizzare la varianza seguendo l'approccio di [Andersen et al., 2001](#). Sulla serie $\{y_{k,t}\}_{t=1}^{T_k}$ viene stimato un modello autoregressivo di ordine p ([Schwert, 1989](#)).

$$y_{k,t} = c + \sum_{j=1}^p \phi_j y_{k,t-j} + \varepsilon_{k,t} \quad (63)$$

Il cui $\varepsilon_{k,t}$ rappresenta il termine d'errore e l'ordine p viene selezionato mediante minimizzazione del criterio informativo di Akaike (AIC):

$$\text{AIC}(p) = -2\mathcal{L}_p + 2(p + 2) \quad (64)$$

con $\mathcal{L}_p$ che denota la log-verosimiglianza del modello $\text{AR}(p)$ stimato. I residui standardizzati vengono quindi calcolati come:

$$\tilde{\varepsilon}_{k,t} = \frac{\varepsilon_{k,t}}{\hat{\sigma}_{\varepsilon,k}} \quad (65)$$

dove $\hat{\sigma}_{\varepsilon,k} = \sqrt{\frac{1}{T_k - p} \sum_{t=p+1}^{T_k} \varepsilon_{k,t}^2}$ rappresenta la deviazione standard campionaria dei residui. Sotto l'ipotesi nulla di assenza di jump, $\tilde{\varepsilon}_{k,t}$ dovrebbero essere approssimativamente $\mathcal{N}(0,1)$. Sulla base di questo, i jumps di volatilità vengono identificati quando i residui standardizzati eccedono la soglia critica τ_{vol} identificata in 4 deviazioni standard.

$$\mathcal{T}_k = \{t: \tilde{\varepsilon}_{k,t} > \tau_{\text{vol}}\} \quad (66)$$

Per ogni elemento $t^* \in \mathcal{T}_k$, i segnali vengono analizzati in modo sequenziale, imponendo un criterio di non overlapping al fine di evitare doppi conteggi: una volta individuato un segnale rilevante, tutti gli istanti successivi $t^* \in \mathcal{T}_k$ tali che t^* ricada in un intervallo temporale già associato allo stesso evento vengono esclusi. Sulla base di questo meccanismo di trigger viene ricostruita la finestra di escalation $\mathcal{W} : [t_{\text{start}}, t_{\text{end}}]$ mediante il seguente algoritmo di ricerca locale ideato sfruttando le caratteristiche empiriche di $\sigma_{i,t}$, riferibili, in primo luogo, alla struttura di autocorrelazione di tale serie:

$$\begin{aligned} t_{\text{start}} &= \max t < t^*: \sigma_{k,t} < \sigma_{k,t+1} \text{ per tutti } t+1 \leq t^* \\ t_{\text{end}} &= \min t > t^*: \sigma_{k,t} > \sigma_{k,t+1} \text{ per tutti } t+1 \geq t^* \end{aligned} \quad (67)$$

Tale procedura identifica l'inizio dell'escalation come l'ultimo minimo locale precedente t^* e la fine come il successivo massimo locale, catturando così l'intero episodio di incremento monotono della volatilità²⁸. Sulla base di questo, risulta possibile identificare l'ampiezza logaritmica di ciascun evento come:

$$J_{k,\text{vol}}^{(i)} = \ln \left(\frac{\sigma_{k,t_{\text{end}}}}{\sigma_{k,t_{\text{start}}}} \right) \quad (68)$$

La raccolta di tali informazioni dalle serie storiche dei sottostanti consente la stima dei parametri funzionali alla generazione dei jumps di volatilità. Dopo aver definito l'insieme delle N_k finestre di escalation $\mathcal{W}$, risulta quindi possibile stimare l'intensità del processo di Poisson sottostante come:

$$\hat{\lambda}_k^{\text{vol}} = \frac{N_k}{T_{\text{years},k}} \quad (69)$$

²⁸ Nel capitolo successivo verrà illustrato un esempio concreto dell'applicazione di questo algoritmo, al fine di chiarire i motivi e le logiche sottostanti.

Le ampiezze dei jumps vengono modellate mediante una distribuzione Gamma (α_k, β_k) , scelta per la sua flessibilità nel descrivere variabili casuali strettamente positive ed asimmetriche coerenti con l'evidenza empirica di tali eventi (Johnson, Kotz, Balakrishnan, 1994).

$$\hat{\alpha}_k = \frac{(\bar{J}_{k,\text{vol}})^2}{s_{J_k}^2}, \quad \hat{\beta}_k = \frac{s_{J_k}^2}{\bar{J}_{k,\text{vol}}}$$

$$\text{dove } \bar{J}_{k,\text{vol}} = \frac{1}{N_k} \sum_{i=1}^{N_k} J_{k,\text{vol}}^{(i)} \quad \text{e} \quad s_{J_k}^2 = \frac{1}{N_k-1} \sum_{i=1}^{N_k} (J_{k,\text{vol}}^{(i)} - \bar{J}_{k,\text{vol}})^2 \quad (70)$$

Correlazione con Jumps nei prezzi

Un elemento distintivo del framework proposto risiede nell'introduzione di una dipendenza stocastica tra jumps nei prezzi e jumps di volatilità in coerenza con le evidenze empiriche fornite da Eraker et al., 2003 e Duffie et al., 2000. Nello specifico, si stima la probabilità condizionata che un jump negativo nei prezzi $N_{k,t}^\downarrow$ si verifichi durante una finestra di escalation della volatilità $\mathcal{W}$. Per ciascun asset k , sia $\mathcal{P}_k^\downarrow$ l'insieme dei giorni in cui si osservano jump negativi nei prezzi (identificati nel paragrafo 2.3.3) e sia $\mathcal{W}_k$ l'insieme delle finestre di escalation, la probabilità di escalation della volatilità condizionata al verificarsi di un jump negativo nei prezzi, $p_k^{\downarrow|\mathcal{W}}$, viene stimata come:

$$p_k^{\downarrow|\mathcal{W}} = \frac{|\{t \in \mathcal{P}_k^\downarrow : \exists [t_{\text{start}}, t_{\text{end}}] \in \mathcal{W}_k \text{ tale che } t_{\text{start}} \leq t \leq t_{\text{end}}\}|}{|\mathcal{P}_k^\downarrow|} \quad (71)$$

Tale parametro quantifica la frazione di jumps negativi nei prezzi che si verificano all'interno di episodi di escalation della volatilità. In particolare, il numeratore conta il numero di jumps negativi di prezzo che ricadono in almeno una finestra di escalation della volatilità, mentre il denominatore rappresenta il numero complessivo di jumps negativi identificati.

Simulazione Monte Carlo

Successivamente alla stima di tali parametri, nella successiva fase, per ciascuno scenario $m = 1, \dots, M$ e per ogni asset k , i jump di volatilità vengono generati con l'obiettivo di preservare simultaneamente le caratteristiche empiriche di frequenza, ampiezza e la co-occorrenza $p_k^{\downarrow|\mathcal{W}}$ con i jumps negativi nei prezzi $N_{k,t}^\downarrow$. In riferimento all'ampiezza dei jumps, si fa ricorso alla distribuzione Gamma sulla base dei parametri stimati in precedenza

$$J_{k,m,t}^{\text{vol}} \sim \text{Gamma}(\hat{\alpha}_k, \hat{\beta}_k) \quad (72)$$

In riferimento alla determinazione della frequenza attesa di accadimento dei fenomeni di jumps al rialzo della volatilità, il numero totale di finestre di escalation $\#\mathcal{W}_{k,m}$ per lo scenario m viene estratto da una distribuzione di Poisson coerente con l'intensità storica:

$$\#\mathcal{W}_{k,m,t} \sim \text{Poisson}(\hat{\lambda}_k^{\text{vol}} \cdot \frac{T_t}{252}) \quad (73)$$

con T che fa riferimento al numero di giorni di borsa aperta rimanenti, a partire dal giorno t considerato. Per ogni finestra $\mathcal{W} = 1, \dots, \mathcal{W}_{k,m}$, la durata $L_{k,m,w}$ viene generata da una distribuzione esponenziale con media empirica $\bar{L}_k$

$$L_{k,m,w} = \text{Exp}(\bar{L}_k) \quad (74)$$

dove $\bar{L}_k = \frac{1}{N_k} \sum_{i=1}^{N_k} (t_{\text{end}}^{(i)} - t_{\text{start}}^{(i)} + 1)$ è stata calcolata a partire dalle N_k finestre identificate storicamente.

Allocazione dei Jumps di volatilità.

L'allocazione temporale delle finestre deve garantire che episodi di escalation distinti non si sovrappongano oltre al rispetto della probabilità di escalation della volatilità condizionata al verificarsi di un jump negativo nei prezzi $p_k^{\downarrow W}$. A tal fine, per ciascuno scenario m , viene definito un vettore binario $\mathcal{O}_{k,m}(t)$ che registra l'occupazione temporale. Tale vettore, inizializzato a zero per tutti gli istanti, verrà popolato da valori pari 1 se per tale giornata di simulazione, all'asset k , è già stata assegnata una finestra di escalation. Per ogni finestra $w = 1, \dots, \mathcal{W}_{k,m}$, sia $L_{k,m,w}$ la durata in giorni della finestra $\mathcal{W}$ ottenuta in conformità all'*Equazione 74*, si segue il seguente algoritmo al fine di definire l'allocazione di riferimento.

1. **Estrazione dell'istante iniziale.** Tale estrazione viene estratta da una distribuzione uniforme considerando tutti $T - L_{k,m,w}$ giorni disponibili:

$$t_0^{(w)} \sim \text{Uniform}\{1, 2, \dots, T - L_{k,m,w} + 1\} \quad (75)$$

2. **Verifica della disponibilità temporale.** L'intervallo candidato viene accettato solo se completamente libero al fine di garantire l'impossibilità di fenomeni overlapping

$$\sum_{t=t_0^{(w)}}^{t_0^{(w)} + L_{k,m,w} - 1} \mathcal{O}_{k,m}(t) = 0 \quad (76)$$

Qualora l'intervallo candidato risulti parzialmente occupato, l'estrazione di $t_0^{(w)}$ viene ripetuta.

3. **Assegnazione della finestra temporale.** Se la condizione è soddisfatta, la finestra viene allocata come:

$$\mathcal{W}_{k,m}^{(w)} = [t_0^{(w)}, t_0^{(w)} + L_{k,m,w} - 1] \quad (77)$$

aggiornando così il vettore $\mathcal{O}_{k,m}$ indicando con il flag "1" le finestre non più disponibili per le successive estrazioni:

$$\mathcal{O}_{k,m}(t) \leftarrow 1, \forall t \in \mathcal{W}_{k,m}^{(w)} \quad (78)$$

Completata l'allocazione delle $\#\mathcal{W}_{k,m}$ finestre per lo scenario m , definiamo un indicatore binario $N_{k,m,t}^{\text{vol}}$ che segnala i giorni in cui è attivo un episodio di escalation della volatilità:

$$N_{k,m,t}^{\text{vol}} = \mathbb{1}_{\{\exists w \in \{1, \dots, \#\mathcal{W}_{k,m}\}: t \in \mathcal{W}_{k,m}^{(w)}\}} \quad (79)$$

Riallocazione condizionata dei Jumps di prezzo sulla base della co-occorrenza con i jumps di volatilità stimata.

Questa prima allocazione dei jumps di volatilità non risulta guidata da logiche di co-occorrenza con i jumps negativi nei prezzi $N_{k,t}^\downarrow$ che necessita quindi di essere gestita in questa fase sulla base della probabilità condizionata p_k^{IW} . A tal fine è necessario definire il numero di jump negativi che devono cadere all'interno delle finestre di escalation $n_{j-co}^{(m)}$ come:

$$n_{j-co}^{(m)} = \min(|\hat{\rho}_k^{IW} \cdot |\mathcal{P}_{k,m}^\downarrow|, \#\mathcal{W}_{k,m}) \quad (80)$$

al fine di garantire che le co-occorrenze $n_{j-co}^{(m)}$ rispettino la probabilità condizionata p_k^{IW} e che queste non vengano forzate ad un numero maggiore rispetto al numero di eventi disponibili $\#\mathcal{W}_{k,m}$.

Nel caso in cui $n_{j-co}^{(m)}$ sia maggiore di 0 vengono campionati, casualmente ed in modo uniforme, $n_{j-co}^{(m)}$ eventi da ricollocare dall'insieme dei giorni in cui si osservano jump negativi nei prezzi $\mathcal{P}_k^\downarrow$ ottenendo, in questo modo, un sottoinsieme di eventi $\mathcal{S}_{ric}$ da ricollocare:

$$\mathcal{S}_{ric} \subset \mathcal{P}_{k,m}^\downarrow, |\mathcal{S}_{ric}| = n_{j-co}^{(m)} \quad (81)$$

In parallelo, vengono selezionate casualmente un insieme $\mathcal{F}_{target}$ di $n_{j-co}^{(m)}$ finestre di escalation $\mathcal{W}$ tra quelle precedentemente allocate e ad ognuna di questa verrà assegnato uno dei Jumps $\mathcal{S}_{ric}$ da ricollocare:

$$\mathcal{F}_{target} = \left\{ \mathcal{W}_{k,m}^{(i_1)}, \dots, \mathcal{W}_{k,m}^{(i_{n_{j-co}^{(m)}}})} \right\} \quad (82)$$

Per ciascuna coppia $(t_j, \mathcal{W}_{k,m}^{(i_j)})$, con $t_j \in \mathcal{S}_{ric}$ e $\mathcal{W}_{k,m}^{(i_j)} \in \mathcal{F}_{target}$, il jump negativo $N_{k,m,t}^\downarrow$ originariamente presente nel giorno t viene prima rimosso dalla sua posizione originale. ($N_{k,m,t}^\downarrow \leftarrow 0$)

Successivamente, viene selezionato casualmente e da una distribuzione uniforme un istante t all'interno della finestra target $\mathcal{W}_{k,m}^{(i_j)}$ alla quale tale evento verrà ricollocato. Tale meccanismo garantisce che, per ogni scenario m , per ogni asset k e per ogni giornata di valutazione t , la probabilità di escalation della volatilità condizionata al verificarsi di un jump negativo nei prezzi converga asintoticamente a $\hat{\rho}_k^{IW}$.

2.4. Le innovazioni stocastiche nel processo della volatilità: il leverage effect

Un elemento caratterizzante dei mercati azionari, rilevante al fine di rappresentare quanto più fedelmente possibile il processo stocastico alla base del modello di pricing proposto è il leverage effect. Esso si riferisce alla tendenza della volatilità ad aumentare dopo shock negativi nei prezzi degli asset (Black, 1976; Christie, 1982) rilevabile come correlazione negativa tra rendimenti e variazioni della

volatilità che risulta particolarmente marcata in particolar modo durante periodi di stress di mercato come evidenziato in [Bekaert e Wu, 2000](#), [Bollerslev et al., 1986](#).

Nel framework proposto, il leverage effect viene incluso mediante una struttura di dipendenza tra le innovazioni browniane che guidano i processi stocastici dei prezzi Z^{corr} e della volatilità Z^{vola} introducendo una relazione $\beta_k^{\text{lv}g}$ tra tali shock standardizzati. Per ciascun asset k , la stima di $\beta_k^{\text{lv}g}$ viene condotta a partire dalle serie storiche dei rendimenti logaritmici $r_{k,t}$ e del proxy di volatilità implicita $\sigma_{k,t}$ descritto nel **Paragrafo 2.3.1**.

In linea con [Christie, 1982](#); [Bekaert e Wu, 2000](#); [Heston, 1993](#), al fine di stabilizzare la varianza e rendere la distribuzione delle variazioni di volatilità più simmetrica, vengono considerati i logaritmi della volatilità $y_{k,t} = \ln(\sigma_{k,t})$ le cui variazioni risultano quindi definibili come:

$$\Delta y_{k,t} = y_{k,t} - y_{k,t-1} = \ln\left(\frac{\sigma_{k,t}}{\sigma_{k,t-1}}\right) \quad (83)$$

La relazione $\beta_k^{\text{lv}g}$ viene quindi stimata mediante il coefficiente di correlazione tra i rendimenti $r_{k,t}$ e le variazioni logaritmiche della volatilità del giorno seguente $\Delta y_{k,t+1}$:

$$\Delta y_{k,t+1} = \alpha_k + \beta_k^{\text{lv}g} r_{k,t} + \varepsilon_{k,t+1} \quad (84)$$

Infine, il parametro $\rho_k^{\text{lv}g}$ si ottiene trasformando il coefficiente di regressione $\beta_k^{\text{lv}g}$ nella correlazione tra rendimenti e variazioni di volatilità come:

$$\rho_k^{\text{lv}g} = \beta_k^{\text{lv}g} \frac{\sigma(r_{k,t})}{\sigma(\Delta y_{k,t+1})} \quad (85)$$

Al fine di integrare tale correlazione all'interno del processo stocastico definito nelle **Equazioni 1 e 2**, per ciascun asset k , scenario m e istante temporale t , a partire delle innovazioni stocastiche dei prezzi Z^{corr} , l'innovazione per il processo di volatilità Z^{vola} viene simulata mediante il ricorso alla decomposizione di Cholesky.

$$Z_{k,m,t}^{\text{vola}} = \rho_k^{\text{lv}g} \cdot Z_{k,m,t}^{\text{corr}} + \sqrt{1 - \beta_k^{\text{lv}g^2}} \cdot \varepsilon_{k,m,t} \quad (86)$$

dove $\varepsilon_{k,m,t} \sim \mathcal{N}(0,1)$ è una variabile casuale normale standardizzata i.i.d. estratta per ogni asset k e per ogni istante temporale t , generata separatamente per ciascuna simulazione m .

2.5. Derivazione della misura di rischio Time-varying

Sulla base del modello di pricing fin qui descritto viene stimato, per ogni giorno di negoziazione t che intercorre tra la data di emissione t_0 dello strumento e l'ultima rilevazione storica disponibile T il prezzo teorico dello strumento $\{V_{th}^{h,MC}\}_{t=1}^T$ confrontabile con il prezzo di mercato storicamente osservato $\{P_t^{h,\text{mercato}}\}_{t=1}^T$. Questa stima, basata sulla distribuzione empirica di possibili scenari futuri, oltre a rappresentare la base informativa per la stima del Markup Π_t fornisce una base informativa che ben si presta ad essere utilizzata per condurre analisi di diverso tipo.

Nei seguenti paragrafi verrà inoltre presentata la metodologia che si propone di definire una misura di sintesi del rischio dello strumento $\mathfrak{R}_t$ che, anziché essere valutata solo al momento dell'emissione, possa evolvere dinamicamente in funzione delle caratteristiche dello strumento stesso e del contesto di mercato.

2.5.1. Determinazione dei rendimenti attesi

Il primo passo di questo processo consiste nel tradurre le evoluzioni dei prezzi simulati in distribuzioni di rendimenti per l'investitore. In riferimento ai certificati di investimento, questa fase risulta meno lineare rispetto ad altri strumenti finanziari in quanto il rendimento non è determinato esclusivamente dalla variazione del prezzo di mercato dello strumento ma risulta guidato anche da una complessa serie di flussi di cassa condizionati all'andamento dei sottostanti che includono eventuali cedole periodiche, possibili rimborsi anticipati del valore nominale con conseguente estinzione anticipata dello strumento nonché dalla peculiare struttura di payoff a scadenza.

Per ciascuna delle 200 simulazioni relative ad ogni data di valutazione t_h il modello procede a ricostruire la sequenza completa di flussi di cassa che un investitore avrebbe potuto ottenere acquistando il prodotto in quella data.

Il primo flusso $CF_0^{(m)}(t) = -P_t^{\text{mercato}}$ (l'unico che rappresenta un'uscita di cassa derivante dall'acquisto dello strumento nel mercato secondario) coincide con il prezzo di mercato dello strumento rilevato alla data di valutazione t e per questo risulta comune per tutte le $m = 200$ simulazioni. Tutti i successivi flussi di cassa $CF_{tj}^{(m)}$ che rappresentano un introito per l'investitore, risultano differenti in riferimento ad ogni simulazione m secondo le condizionalità discusse nella **fase 4** del processo di pricing. Per ogni data di valutazione t_h e per ogni simulazione m si ottiene così un vettore di flussi $\overrightarrow{CF^{(m)}}$ la cui dimensionalità non è costante ma dipende dal numero di date di valutazione successive a t :

$$\overrightarrow{CF^{(m)}}(t) = [CF_0^{(m)}(t), CF_1^{(m)}(t), CF_2^{(m)}(t), \dots, CF_{\text{maturity}}^{(m)}(t)] \quad (87)$$

Questo non garantisce comunque il fatto che l'ultimo flusso di cassa $CF_{\text{maturity}}^{(m)}$ di ogni simulazione m coincida con la naturale scadenza T dello strumento.

Al fine di determinare i rendimenti simulati in riferimento ad ogni data di valutazione t si fa quindi ricorso ad un approccio *Rolling Backward* caratterizzato da una data di scadenza T fissa e da un progressivo incremento delle date di valutazioni iniziali t_h .

$$R(m, t_1 \rightarrow t_K), R(m, t_2 \rightarrow t_K), \dots, R(m, t_n \rightarrow t_K) \quad (88)$$

Questo approccio è stato identificato in coerenza con quanto evidenziato da [Hens e Rieger, 2014](#) e [Entrop et al., 2016](#) i quali hanno osservato che gli investitori in *investment certificates* tendono generalmente a mantenere il loro investimento fino alla naturale scadenza. Al fine di considerare la discontinuità temporale di $CF_j^{(m)}$ nonché il costo opportunità del capitale si considera che, ogni flusso, appena

erogato, venga reinvestito al tasso di interesse r_{daily_t} rilevato nella medesima data di valutazione assumendo una capitalizzazione composta su base giornaliera con $r_{daily_t} = (1 + rf_t)^{1/252} - 1$ dove rf_t rappresenta il tasso di interesse annuo nel giorno t delle obbligazioni governative tedesche con scadenza tre mesi.

Per ogni giornata di borsa che intercorre tra la data di valutazione t_k e la data di scadenza dello strumento t_K , si segue un processo iterativo che accumula tutti i flussi riconosciuti all'investitore nello scenario m che vengono successivamente capitalizzati su base giornaliera. In ragione di questo il Montante M evolve come:

$$M_{tk+1}^{(m)} = M_{tk}^{(m)} \cdot (1 + r_{daily_t}) + CF_{tj}^{(m)} \quad (89)$$

Questo processo viene iterato fino alla data di valutazione finale t_K in cui si individua $M_{T_{finale}}^{(m)}$. Tale valore include le cedole ricevute e capitalizzate, l'eventuale rimborso anticipato del valore nominale opportunamente capitalizzato, oppure, in alternativa, il payoff a scadenza. I rendimenti rappresentativi dell'investimento nel giorno t_h nello scenario m sono quindi identificati come:

$$R_{cum,t}^{(m)} = \left(\frac{M_{T_{finale}}^{(m)}}{|CF_0^{(m)}|} - 1 \right) \times 100 \quad (90)$$

Tale rendimento può essere rappresentato anche in modo annualizzato secondo quanto segue:

$$R_{ann,t}^{(m)} = \left[\left(\frac{M_{T_{finale}}^{(m)}}{|CF_{0,t}^{(m)}|} \right)^{\frac{252}{T_K - t}} - 1 \right] \times 100 \quad (91)$$

A partire da queste relazioni, si ottengono così, per ogni giorno di valutazione iniziale t_k , i vettori di dimensione $M = 200$ rappresentativi di tutti i rendimenti simulati.

$$\mathcal{R}_{cum_t} = [R_{cum_t}^{(1)}, R_{cum_t}^{(2)}, \dots, R_{cum_t}^{(M)}] \in R^M, \quad (92)$$

$$\mathcal{R}_{ann_t} = [R_{ann_t}^{(1)}, R_{ann_t}^{(2)}, \dots, R_{ann_t}^{(M)}] \in R^M$$

Ripetendo questo processo per ogni data di valutazione iniziale che intercorre tra la data di emissione e l'ultima rilevazione storica disponibile si ottiene così l'intera serie temporale delle distribuzioni dei rendimenti simulati ε_{cum} , $\varepsilon_{annuale}$.

$$\varepsilon_{cum} = [\mathcal{R}_{cum_1}, \mathcal{R}_{cum_2}, \dots, \mathcal{R}_{cum_T}] \quad (93)$$

$$\varepsilon_{ann} = [\mathcal{R}_{ann_1}, \mathcal{R}_{ann_2}, \dots, \mathcal{R}_{ann_T}]$$

Questi vettori catturano tutte le caratteristiche di rischio-rendimento rappresentativi dell'investimento nel certificato nei giorni in cui questo è negoziato escludendo la possibilità di vendita dello strumento

nel mercato secondario in una data antecedente alla sua scadenza naturale. A partire da queste stime, si propone una metodologia atta a rappresentare dinamicamente il rischio di mercato dei singoli prodotti.

2.5.2. Rischio di mercato: la proposta di una misura time-varying

Al fine di tradurre questa ricchezza informativa in una misura sintetica di rischio si propone un approccio multi-parametrico fondato su sette metriche complementari: i Value at Risk con livello di confidenza rispettivamente del 90% e 95% (Var_{10}, Var_5), gli Expected Shortfall a intervalli di confidenza del 90% e 95% (ES_{10}, ES_5), la probabilità di incorrere in perdite superiori al 10% e al 50% del capitale investito ($\mathbb{P}_{10}, \mathbb{P}_{50}$) la deviazione standard dei rendimenti σ_{yield} . Questi parametri sono computati, in riferimento ad ogni giorno di negoziazione t , a partire dal vettore ε_{cum} .

I Value at Risk, gli Expected Shortfall e σ_{yield} sono stati ottenuti secondo le formulazioni standard comunemente adottate in letteratura mentre $\mathbb{P}_{10}, \mathbb{P}_{50}$ adottano un approccio diverso focalizzandosi sul superamento di una soglia di perdita specifica anziché concentrarsi su percentili standard della distribuzione dei rendimenti.

$$\mathbb{P}_{10t} = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M 1 \{ \mathcal{R}_{cumt} < -0.10 \} \times 100 \quad (94)$$

$$\mathbb{P}_{50t} = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M 1 \{ \mathcal{R}_{cumt} < -0.50 \} \times 100$$

Così facendo, per ogni giornata di negoziazione t si ottiene un vettore contenente queste sette metriche ognuna delle quali si pone l'obiettivo di catturare aspetti di rischio differenti.

$$\rho_{risk}(t) = [Var_{10}, Var_5, ES_5, ES_{10}, \mathbb{P}_{10}, \mathbb{P}_{50}, \sigma_{roll}] \quad (95)$$

2.5.3. Identificazione delle soglie di rischio

Al fine di definire una misura di sintesi rappresentativa del rischio dello strumento in una scala discreta da 1 a 7, per ciascuna delle sette metriche p è necessario identificare un sistema di 6 soglie $S_p^{(k)}$ funzionale al partizionamento di ciascuna metrica di rischio rappresentata nel vettore $\rho_{risk}(t_k)$ in 7 classi di rischio. La numerosità di tale scala è stata scelta per garantire continuità con l'indicatore SRI.

$$S_p = [S_p^{(1)}, S_p^{(2)}, S_p^{(3)}, S_p^{(4)}, S_p^{(5)}, S_p^{(6)}] \quad (96)$$

Dove $S_p^{(k)}$ rappresenta il valore soglia che separa i livelli di rischio adiacenti. L'identificazione di tali soglie rappresenta la fase cruciale per la corretta riuscita della determinazione della misura di sintesi del rischio dello strumento $\mathfrak{R}_t$. A tal fine, si adotta un approccio comparativo basato su quattro distinti algoritmi di partizione, finalizzato all'individuazione della metodologia in grado di massimizzare l'omogeneità interna dei livelli di rischio, garantendo al contempo una chiara separazione tra classi adiacenti. Le soglie così ottenute sono inoltre confrontate con una preliminare classificazione dei livelli di rischio definita su base expert-judgmental. Per ciascuna metrica di rischio $p \in$

$Var_{10}, Var_5, ES_5, ES_{10}, \mathbb{P}_{10}, \mathbb{P}_{50}, \sigma_{roll}$, il punto di partenza comune consiste nei valori osservati su tutti i certificates in perimetro e su tutte le giornate di negoziazione t . La qualità del partizionamento è valutata tramite due metriche. La Goodness of Variance Fit (GVF) misura la distanza tra ciascuna osservazione e la media del cluster di riferimento ed è definibile come:

$$GVF = 1 - \frac{\sum_{j=1}^k \sum_{i \in C_j} (x_i - \mu_j)^2}{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2} \quad (97)$$

dove k rappresenta il numero di cluster, C_j l'insieme delle osservazioni del cluster j , x_i le singole osservazioni, μ_j la media del cluster j e $\bar{x}$ la media globale.

il Coefficient of Variation (CV) valuta l'equilibrio distributivo delle osservazioni tra i 7 cluster ed è definibile come:

$$CV = \frac{\text{Std}(n_j)}{\bar{n}} \quad (98)$$

dove n_j rappresenta il numero di osservazioni nel cluster j e $\bar{n}$ è la media del numero di osservazioni tra i cluster.

Vengono di seguito presentati i quattro algoritmi considerati:

1. Quantile-based classification

L'algoritmo più semplice per l'identificazione del sistema di soglie di rischio $S_p^{(k)}$ si basa sulla divisione della distribuzione empirica delle metriche in quantili. In questo approccio, ciascun cluster contiene approssimativamente lo stesso numero di osservazioni, garantendo una suddivisione equi-frequenza individuando le soglie $S_p^{(k)}$ come:

$$S_p^{(k)} = Q_{k/7}(X_p), k = 1, \dots, 6 \quad (99)$$

dove $Q_\alpha(X_p)$ indica il quantile empirico di ordine α della distribuzione della metrica p .

2. K-means clustering

L'algoritmo K-means è un metodo di partitioning iterativo (MacQueen, 1967; Hartigan, Wong, 1979) con l'obiettivo di minimizzare la funzione obiettivo.

$$J(C, \mu) = \sum_{k=1}^7 \sum_{x_i \in C_k} \|x_i - \mu_k\|^2 \quad (100)$$

dove $(\mu = \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_7)$ rappresenta l'insieme dei centroidi dei cluster. Al fine della loro individuazione, l'algoritmo procede iterativamente attraverso due fasi:

I. Ogni osservazione (x_i) viene assegnata al cluster con centroide più vicino:

$$C_k^{(t+1)} = \left\{ x_i : \|x_i - \mu_k^{(t)}\|^2 \leq \|x_i - \mu_j^{(t)}\|^2 \forall j \neq k \right\} \quad (101)$$

II. I centroidi vengono ricalcolati come media aritmetica delle osservazioni assegnate a ciascun cluster:

$$\mu_k^{(t+1)} = \frac{1}{|\mathcal{C}_k^{(t+1)}|} \sum_{x_i \in \mathcal{C}_k^{(t+1)}} x_i \quad (102)$$

Il processo converge quando non si verificano ulteriori riassegnazioni oppure quando la variazione di J scende sotto una soglia ϵ predefinita²⁹. Per via del fatto che la soluzione finale $J(\mathcal{C}, \mu)$ dipende dall'inizializzazione casuale dei centroidi, è necessario rieseguire l'algoritmo per R volte³⁰ selezionando la configurazione che minimizza la funzione J :

$$\mathcal{C}^* = \arg \min_{r=1, \dots, R} J_r(\mathcal{C}_r, \mu_r) \quad (103)$$

Le soglie $S_p^{(k)}$ vengono ottenute come i punti medi tra centroidi adiacenti ($\mu_{(1)} < \mu_{(2)} < \dots < \mu_{(7)}$):

$$S_p^{(k)} = \frac{\mu_{(k)} + \mu_{(k+1)}}{2}, \quad k = 1, \dots, 6 \quad (104)$$

3. Jenks Natural Breaks

L'algoritmo di Jenks è un metodo che ha l'obiettivo di minimizzare le varianze all'interno di una classe omogenea identificando, in modo dinamico, le rotture naturali nella distribuzione dei dati (Fisher, 1958; Jenks, 1967). Il punto di partenza è rappresentato dall'insieme ordinato dei valori osservati in riferimento a ciascuna metrica di rischio p considerata:

$$X_p^{\text{sort}} = x_{(1)}, x_{(2)}, \dots, x_{(n)} \quad (105)$$

L'algoritmo si serve di due matrici di dimensione $n \times K$:

- I. **Lower class Limit** $L[i, k]$: rappresentativa dell'indice dell'ultima osservazione della classe $k - 1$ quando si partizionano le prime i osservazioni in k classi;
- II. **Variance combinations** $V[i, k]$: rappresentativa della varianza totale minima ottenibile partizionando le prime i osservazioni in k classi.

$$V[i, k] = \min \left\{ V[j, k-1] + \sum_{\ell=j+1}^{i-1} (x_{(\ell)} - \bar{x}_{j+1:i})^2 \right\} \quad (106)$$

La soluzione ottimale $V[n, K]$ rappresenta la minima varianza totale intra-classe per $K = 7$ classi. I breakpoint b_k vengono quindi estratti tramite un processo di backtracking dalla matrice $L[i, k]$:

$$b_k = L[b_{k+1}, k+1], \quad k = K-1, \dots, 1, \quad b_K = n, \quad (107)$$

e le soglie di rischio $S_p^{(k)}$ sono definite come:

$$S_p^{(k)} = x_{(b_k)} \quad (108)$$

L'algoritmo presenta una complessità computazionale superiore rispetto al metodo K-means, ma garantisce una soluzione globale ottimale per la minimizzazione della varianza intra-classe.

²⁹ Nel successivo paragrafo verrà presentata una analisi in merito alla stabilità delle stime

³⁰ Nell'analisi empirica si è fatto ricorso a $R=20$ con soglia massima 500 iterazioni

4. Ward's Hierarchical Clustering

L'algoritmo di Ward, 1963 è un metodo gerarchico agglomerativo che mira a suddividere le osservazioni in cluster omogenei minimizzando la varianza interna dei gruppi. A differenza di K-means, Ward costruisce una gerarchia di cluster fondendo progressivamente le osservazioni in base all'incremento minimo della somma delle varianze intra-classe.

Sia $X_p = x_1, x_2, \dots, x_n$ il vettore dei valori osservati della metrica di rischio p . L'algoritmo inizia considerando ciascuna osservazione come cluster separato e procede iterativamente combinando coppie di cluster (C_i, C_j) in modo da minimizzare l'incremento della somma delle varianze intra-cluster ΔWSS :

$$\Delta WSS(C_i, C_j) = WSS(C_i \cup C_j) - WSS(C_i) - WSS(C_j) = \frac{n_i n_j}{n_i + n_j} \|\mu_{C_i} - \mu_{C_j}\|^2 \quad (109)$$

dove n_i e n_j rappresentano la numerosità dei cluster C_i e C_j . μ_{C_i}, μ_{C_j} rappresentano invece i rispettivi centroidi. Il processo di fusione continua fino a ottenere il numero desiderato di cluster $K = 7$, corrispondenti ai livelli di rischio definiti.

Le soglie di rischio $S_p^{(k)}$ vengono quindi definite come i punti medi tra cluster consecutivi:

$$S_p^{(k)} = \frac{\mu_{C_{(k)}} + \mu_{C_{(k+1)}}}{2}, \quad k = 1, \dots, 6 \quad (110)$$

Le soglie di rischio $S_p^{(k)}$ sono quindi definite come i punti medi tra i centroidi dei cluster successivi, ordinati in base al loro valore medio.

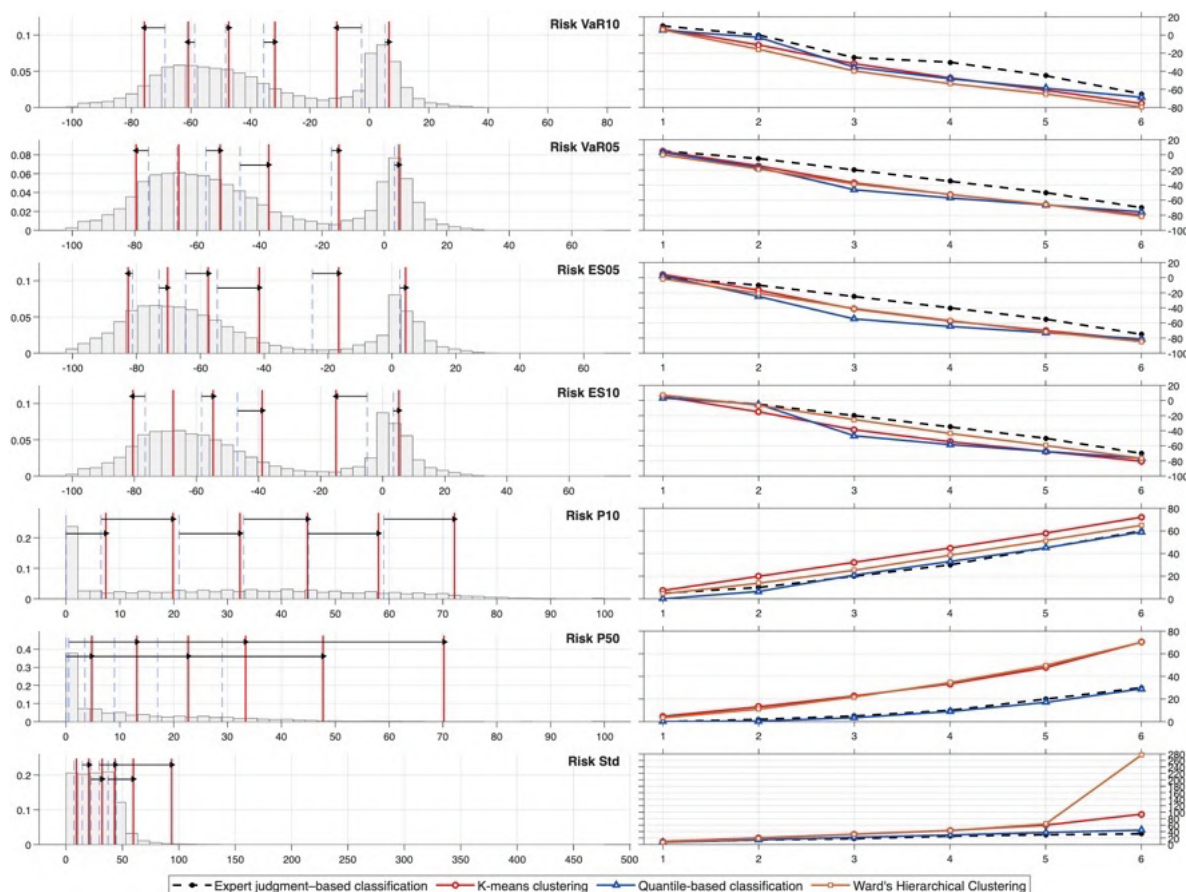
Selezione del modello ottimale

Di seguito, vengono presentate le considerazioni che sono state condotte al fine di definire il metodo più adatto a identificare l'algoritmo più funzionale nel caso in esame. Tale scelta richiede un'analisi comparativa che si pone l'obiettivo di bilanciare la capacità discriminativa delle soglie risultanti con la necessità di mantenere classi numericamente equilibrate. La **Figura 2.1** e la **Tabella 2.2** mostrano il confronto sistematico tra i metodi di clustering implementati.

Tabella 2.2 – *Analisi qualità del partizionamento tra gli algoritmi di clustering*

Metrica	Expert Judgment		K-means Clustering		Quantile-based		Ward's Hierarchical	
	GVF	CV (%)	GVF	CV (%)	GVF	CV (%)	GVF	CV (%)
VaR₁₀	0.974	71.8	0.978	38.8	0.967	0.0	0.976	34.6
VaR₅	0.978	74.3	0.980	36.4	0.977	0.0	0.980	50.4
ES₅	0.978	91.2	0.984	39.7	0.980	0.0	0.982	57.9
ES₁₀	0.980	77.3	0.982	40.7	0.966	0.0	0.981	57.9
P₁₀[*]	0.980	58.9	0.980	53.2	0.969	57.5	0.978	41.1
P₅₀[*]	0.943	84.1	0.971	108.9	0.889	52.7	0.969	98.3
σ_{roll}[*]	0.856	43.4	0.948	65.7	0.882	0.0	0.927	67.9
Media	0.956	71.6	0.975	54.8	0.947	15.7	0.971	58.3

Figura 2.1 – distribuzione metriche di rischio e confronto soglie di rischio identificate.³¹



Il metodo di Jenks, pur teoricamente ottimale nella minimizzazione della varianza intra-classe, nel caso in esame³² presenta una sostanziale incapacità di discriminare tra livelli di rischio differenti in caso di distribuzioni multimodali o fortemente asimmetriche prive di separazioni naturali come evidenziato in [Slocum et al., 2013](#) nell'ambito della cartografia e [Brewer, Pickles, 2002](#) per quanto concerne l'analisi di dati epidemiologici. Per queste ragioni, il metodo è escluso dalla valutazione comparativa finale. I restanti metodi presentano valori medi di GVF superiori a 0,94 evidenziando comunque delle caratteristiche differenti nelle soglie individuate come evidenziato in **Figura 2.1**

L'algoritmo k-means clustering emerge come il metodo con la più elevata capacità discriminatoria, registrando un GVF medio di 0,975 e prestazioni consistenti su tutte le metriche considerate comprese nell'intervallo 0,948 – 0,984. Il CV medio del 54,8% riflette un buon bilanciamento delle numerosità all'interno di ciascun range.

L'algoritmo Ward's Hierarchical Clustering produce un valore di GVF simile (pari a 0,971) ma un CV di 3,5 punti percentuali superiore. Le differenze tra i due metodi risultano marginali: come risulta evidente dal grafico presentato in **Figura 2.1**, queste sono riscontrabili con particolare riferimento alle

³¹ Nella sezione di sinistra della **Figura 2.1**, oltre alla distribuzione delle metriche di rischio, si propone un confronto grafico delle soglie identificate a valle dell'applicazione del metodo basato sui quantili (linea blu) e del metodo k-mean (linea rossa). Nella sezione destra, le stesse soglie vengono confrontate con gli altri algoritmi presentati.

³² In riferimento al metodo di Jenks, si è rilevato un CV medio del 245%

metriche $\mathbb{P}_{10}$, ES_{10} in cui l'algoritmo di Ward tende a collocare soglie più conservative. Significativa risulta invece l'identificazione della soglia di rischio massimo di σ_{roll} . Tale metrica, caratterizzata da una skewness particolarmente pronunciata, fa emergere una parziale carenza, in tale contesto, di minimizzare la varianza infra-cluster suggerendo una soglia $S_p^{(6)}$ particolarmente elevata.

Il metodo basato sui quantili, pur garantendo per costruzione la minimizzazione di CV³³, evidenzia una capacità discriminatoria più bassa dell'algoritmo k-means. Le principali differenze, evidenziate graficamente in **Figura 2.1** sono riferibili alle metriche VaR_{10} , VaR_5 , ES_5 , ES_{10} per via della loro distribuzione bimodale ed in $\mathbb{P}_{50}$, σ_{roll} per via della distribuzione particolarmente asimmetrica che non viene catturata da questo metodo.

La definizione delle soglie su base expert judgemental, pur presentando un GVF soddisfacente, non risulta adatta per dividere il campione in classi omogenee compromettendo la robustezza statistica delle classi rispetto alle soluzioni algoritmiche e giustificando così il ricorso a modelli di clustering.

In ragione di questo, per la definizione delle soglie di rischio $S_p^{(k)}$, si fa ricorso al metodo k-mean. Nella successiva **Tabella 2.3** vengono presentate le soglie che saranno utilizzate nel corso dell'analisi empirica.

Tabella 2.3 – Soglie di rischio $S_p^{(k)}$ definite per le sette metriche considerate³⁴

Metrica	$S_p^{(1)}$	$S_p^{(2)}$	$S_p^{(3)}$	$S_p^{(4)}$	$S_p^{(5)}$	$S_p^{(6)}$
VaR₁₀	6.64	-10.97	-31.73	-47.33	-60.96	-75.67
VaR₅	4.70	-14.56	-37.08	-52.61	-65.91	-79.51
ES₅	4.26	-16.70	-41.54	-57.53	-70.21	-82.61
ES₁₀	5.22	-15.05	-38.81	-54.60	-67.48	-80.49
$\mathbb{P}_{10}^*$	7.36	19.89	32.30	44.85	58.03	72.14
$\mathbb{P}_{50}^*$	4.77	13.15	22.68	33.36	47.74	70.19
σ_{roll}^*	9.12	20.35	31.97	43.40	59.77	93.75

E' utile sottolineare che le metriche presentate sono contraddistinte da due logiche di classificazione differente: in riferimento a VaR_{10} , VaR_5 , ES_5 , ES_{10} valori più negativi di $S_p^{(k)}$ rappresentano livelli di rischio elevato mentre, in riferimento a $\mathbb{P}_{10}$, $\mathbb{P}_{50}$, σ_{roll} un maggior rischio è riscontrabile in caso di elevati livelli di $S_p^{(k)}$. Per ciascuna data di valutazione t e per ciascuna metrica di rischio, viene definita una funzione di classificazione $\phi_p: \mathbb{R} \rightarrow \{1,2,3,4,5,6,7\}$ che associa al valore osservato ($\rho_p(t)$) un livello di rischio discreto mediante confronto con le soglie $S_p^{(k)}$.

In riferimento alle metriche i cui valori più negativi corrispondono ad un maggior rischio:

³³ i valori di CV diversi da 0 (57,5% e 52,7% per le metriche $\mathbb{P}_{10}$, $\mathbb{P}_{50}$) sono spiegabili dal fatto che il campione presenta valori pari a 0 ripetitivamente in riferimento a circa il 20% ed il 40% delle osservazioni (rif. **Figura 2.1**)

³⁴ (*) Parametri per cui è prevista una logica di classificazione inversa: valori elevati equivalgono a livelli di rischio maggiori

$$\phi_p(\rho_p(t)) = 1 + |\{k \in 1, \dots, 6: \rho_p(t) < S_p^{(k)}\}| \quad (111)$$

dove $S_p^{(1)} > S_p^{(2)} > \dots > S_p^{(6)}$ sono le soglie ordinate in senso decrescente al fine di garantire:

$$\begin{cases} \phi_p = 1 & \text{se } \rho_p(t) \geq S_p^{(1)} \text{ (rischio minimo)} \\ \phi_p = 7 & \text{se } \rho_p(t) < S_p^{(6)} \text{ (rischio massimo)} \end{cases} \quad (112)$$

In riferimento alle metriche $\mathbb{P}_{10}$, $\mathbb{P}_{50}$, σ_{roll} viene seguito lo stesso algoritmo ma con logica inversa.

$$\phi_p(\rho_p(t)) = 1 + |\{k \in 1, \dots, 6: \rho_p(t) > S_p^{(k)}\}| \quad (113)$$

dove $S_p^{(1)} < S_p^{(2)} < \dots < S_p^{(6)}$ sono ordinate in senso crescente come evidenziato in **Tabella 2.2**.

Applicando tale funzione a tutte le metriche per ogni data (t_k) , si ottiene il vettore dei livelli di rischio $(\mathbf{L}(t))$:

$$\mathbf{L}(t) = [\phi_1(\rho_1(t)), \phi_2(\rho_2(t)), \dots, \phi_7(\rho_7(t))] \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}^7 \quad (114)$$

Tali valori vengono infine aggregati nel valore di rischio sintetico $\mathfrak{R}_t$ mediante una media aritmetica arrotondata all'intero più vicino:

$$\mathfrak{R}_t = \left\lfloor \frac{1}{7} \sum_{p=1}^7 \phi_p(\rho_p(t)) + 0.5 \right\rfloor \quad (115)$$

Convergenza dell'algoritmo k-mean e stabilità della soluzione

Poiché l'algoritmo K-means è un metodo di ottimizzazione numerica iterativa e non garantisce il raggiungimento del minimo globale della funzione obiettivo, è necessario introdurre alcune considerazioni in merito alla convergenza dell'algoritmo e alla stabilità delle soluzioni ottenute.

L'algoritmo K-means è stato eseguito con $R = 20$ repliche indipendenti per ciascuna metrica di rischio, al fine di mitigare la dipendenza della soluzione dall'inizializzazione casuale dei centroidi.

Per ogni replica, l'algoritmo è stato lasciato convergere fino all'assenza di riassegnazioni tra iterazioni consecutive non superando comunque la soglia delle 500 iterazioni.

Tabella 2.4 – Convergenza ricerca Soglie di rischio $S_p^{(k)}$ $R=20$ e confronto con $R=50$, metodo k-mean

Metrica	Numero Repliche $R = 20$					Confronto $R = 20$ vs 50
	J_{medio}	$CV(\%)$	J_{min}	$N.\text{Iterazioni}$	$N(J_{\text{min}})$	Max $\Delta S_p^{(k)} \%$
ES_5	8.41e+05	0.26	8.37e+05	106	3	0.21
ES_{10}	9.66e+05	7.65	8.83e+05	69	1	0.52
$\mathbb{P}_{10}^*$	6.48e+05	0.84	6.36e+05	22	1	0.15
$\mathbb{P}_{50}^*$	3.88e+05	1.70	3.70e+05	26	1	0.19
σ_{roll}^*	9.39e+05	0.00	9.39e+05	114	14	0.03
VaR_5	9.65e+05	4.30	9.08e+05	66	1	0.47
VaR_{10}	1.02e+06	3.11	9.80e+05	75	4	0.35

³⁵ Con $|\cdot|$ si intende indicare la cardinalità dell'insieme. Nella formula in oggetto, vengono per questo contate le soglie che sono state oltrepassate dall'osservazione $\rho_p(t)$

I risultati proposti nella **Tabella 2.4** riportano, per ciascuna metrica, il numero medio di iterazioni necessarie alla convergenza e la variabilità della funzione obiettivo J tra le 20 repliche condotte. Come evidenziato, la convergenza è generalmente rapida e compresa tra 22 e 114 iterazioni. Il coefficiente di variazione di $CV(J)$ tra repliche risulta inferiore all'8% per tutte le metriche considerate indicando che l'inizializzazione casuale dei centroidi μ non influenza in modo significativo le soglie di rischio $S_p^{(k)}$. Nonostante questo, facendo ricorso a $R = 20$ repliche, in alcuni casi si nota che solo una di queste abbia raggiunto la convergenza al minimo locale.³⁶

Per verificare la sufficienza di tale numerica, è stato condotto un confronto con $R=50$. La colonna Max ΔS (%) della **Tabella 2.4** mostra che tale aumento del numero di repliche produce variazioni relative delle soglie abbondantemente inferiori all'1% non giustificando tale necessità.

³⁶ Alla luce di tali rilevazioni, è facile immaginare che il minimo osservato non sia il minimo globale

Capitolo 3. Applicazione empirica

Dopo aver affrontato gli aspetti teorici alla base del processo di pricing si presenta un'esemplificazione al fine di rappresentare una applicazione concreta di quanto proposto ripercorrendo alcune delle fasi peculiari del framework proposto prendendo come riferimento un prodotto dalle caratteristiche standard negoziato nel mercato SeDeX di Borsa Italiana.

3.1. Le caratteristiche del Certificato *NLBNPIT1UX66*

A questo fine, si prende in esame il certificato “*Low Barrier Cash Collect*” emesso da BNP Paribas Issuance B.V. con Codice ISIN *NLBNPIT1UX66*. Si tratta di un prodotto a capitale condizionatamente protetto che garantisce all'investitore delle cedole mensili condizionate pari allo 0,93% del valore nominale dello strumento. Tale flusso è subordinato alla performance del peggiore tra i tre sottostanti considerati (Enel, Vestas Wind System e NextEra Energy). Al fine di aver diritto all'erogazione della cedola, alla data di osservazione mensile, il sottostante con la performance peggiore non deve chiudere la giornata di negoziazione ad un livello inferiore rispetto alla soglia trigger $Trigger_{CPN}$ pari al 40% del valore di Strike K_i registrato alla Data di Settlement (3 ottobre 2023). La stessa soglia del 40% è rappresentativa della barriera a scadenza la cui data di osservazione è stata fissata al termine della giornata di borsa di lunedì 5 ottobre 2026. Qualora in tale circostanza il sottostante con performance peggiore si trovi al di sopra di tale soglia, verrà riconosciuto all'investitore, oltre all'ultima cedola, il rimborso completo del valore nominale. In caso contrario il valore nominale sarà decurtato di un importo direttamente commisurato alla performance negativa registrata dal peggior sottostante a partire dalla Data di Settlement.

Si riportano di seguito, nella **Tabella 3.1**, il prezzo di chiusura K_i dei tre sottostanti registrato nella giornata di borsa di martedì 3 ottobre 2023 così come le relative soglie per il pagamento delle cedole condizionali, la soglia per il rimborso anticipato e la barriera a scadenza, tutte calcolate a partire da K_i .

Tabella 3.1 – Prezzo di Settlement e soglie trigger certificato *NLBNPIT1UX66*

Sottostante	ISIN	K_i	$Trg_{Autocall}$	Trg_{CPN}	Barrier
Enel SpA	IT0003128367	5,52	5,52	2,21	2,21
Vestas Wind Systems A/S	DK0061539921	139,06	139,06	55,62	55,62
NextEra Energy Inc	US65339F1012	52,78	52,78	21,11	21,11

Tale prodotto si caratterizza inoltre per la presenza della clausola “Memory” che garantisce all'investitore il pagamento delle precedenti cedole non corrisposte qualora nelle successive date di valutazione il trigger di pagamento fosse di nuovo rispettato.

È inoltre previsto il rimborso anticipato del valore nominale dello strumento e la contestuale scadenza anticipata del prodotto qualora il peggiore tra i tre sottostanti, in una delle date mensili di osservazione

della cedola (escludendo le prime 5) si trovi al di sopra del valore $Trg_{Autocall} = K_i$. Si riportano in **Tabella 3.2** le principali caratteristiche dello strumento in esame.

Tabella 3.2 – *Principali caratteristiche del certificato NLBNPIT1UX66*³⁷

Caratteristiche dello strumento	
Codice ISIN	NLBNPIT1UX66
Emittente	BNP Paribas Issuance B.V.
Garante	BNP Paribas S.A.
Nome struttura	Low Barrier Cash Collect
Valore Nominale	100 EUR
Importo cedola mensile	0,93 EUR
Osservazioni senza autocall	5
Clausola Memory	Sì
Data di Settlement	3 ottobre 2023
Data di Scadenza	5 ottobre 2026
Trigger Cedola	40% del Prezzo di Riferimento Iniziale
Barriera a scadenza	40% del Prezzo di Riferimento Iniziale

Al contrario della soglia *Barrier*, osservata solo alla data di scadenza, le altre date di osservazione sono previste a cadenza mensile secondo il calendario riportato nella **Tabella A.01** in Annex.

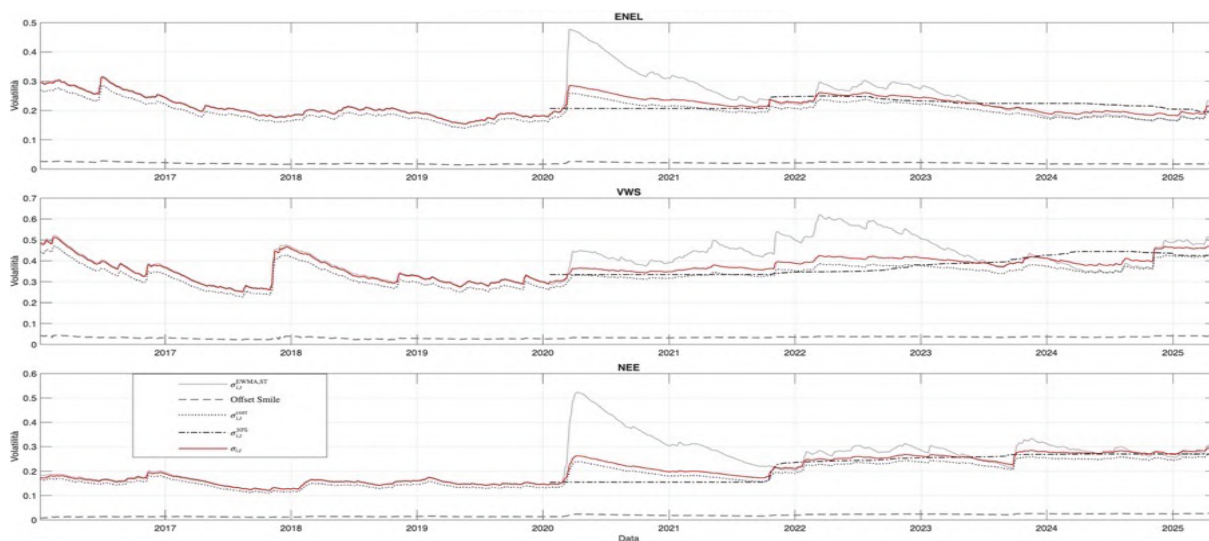
[TABELLA A.01]

3.2. La Stima della volatilità

Com'è stato sottolineato nell'overview del modello, uno step fondamentale è rappresentato dalla simulazione dell'andamento dei sottostanti il cui primo passo è rappresentato dalla stima del proxy della volatilità implicita $\sigma_{i,t}$. Seguendo la procedura presentata in precedenza tale stima viene condotta a partire dalla serie storica degli Asset. Di seguito, nella **Figura 3.1**, si presenta in colore rosso l'andamento della volatilità $\sigma_{i,t}$ relativa ai diversi sottostanti nei diversi giorni di negoziazione riportando, inoltre, i contributi dei fattori correttivi legati alla Moneyness m e al Time to Maturity. Come evidenziato dalla figura, la volatilità di Vestas Wind System risulta stabilmente superiore a quella degli altri sottostanti seppur si noti chiaramente come questo Asset abbia risentito meno dei competitors degli shock legati al periodo pandemico. L'effetto di $\Delta\sigma_{\text{offset}}$ rappresentativo della correzione time-dependent connessa alla distanza tra il prezzo del sottostante e lo Strike, è risultato trascurabile, in quanto, alla data dell'ultima osservazione storica, la scadenza del prodotto risulta superiore all'anno.

³⁷ Tali informazioni sono disponibili sulla pagina ufficiale dell'emittente dedicata al prodotto in esame raggiungibile al seguente link: <https://investimenti.bnpparibas.it/product-details/NLBNPIT1UX66/>

Figura 3.1 – Evoluzione stima volatilità implicita $\sigma_{i,t}$ e delle relative componenti³⁸



3.2.1. La Stima dei parametri alla base del processo mean reverting

Questa stima di $\sigma_{i,t}$ rappresenta, nei diversi giorni di negoziazione, il punto di partenza per la simulazione della volatilità dei diversi asset che sarà condotta fino alla data di scadenza dello strumento. A questo fine, risulta necessario stimare i parametri κ_k , θ_k e σ_k^σ , che definiscono la dinamica mean-reverting della volatilità stocastica dei singoli asset k . Tale stima può essere effettuata applicando il metodo dei minimi quadrati ordinari, come descritto nell'*Equazione 31* del **paragrafo 2.3.1**. Nella **Tabella 3.3** vengono presentati i risultati di tale stima in riferimento ai tre sottostanti in perimetro.

Tabella 3.3 – Risultati della regressione funzionale alla stima di κ_k e σ_k^σ ³⁹

Sottostante	θ_k	κ_k	SE_{κ}	p -value	$\sigma_{v,k}$
Enel	0.197	0.785 (2.40)	0.327	0.017**	0.069
Vestas Wind System	0.337	0.923 (2.14)	0.431	0.033**	0.131
NextEra Energy	0.187	0.063 (0.30)	0.212	0.768	0.075

L'evidente eterogeneità nelle dinamiche di volatilità dei tre sottostanti richiede l'adozione di approcci di modellizzazione distinti all'interno del processo simulativo. Enel e VWS presentano velocità di mean-reversion κ pari rispettivamente a 0,785 e 0,923, significative al livello del 5%. Al contrario, NEE mostra una dinamica sostanzialmente differente, con $\kappa = 0,063$ non significativamente diverso da zero suggerendo una persistenza molto elevata degli shock di volatilità che assimila tale processo ad un random walk piuttosto che ad un processo mean reverting. I livelli di equilibrio di lungo periodo θ

³⁸ In colore rosso si rappresenta il proxy della volatilità implicita $\sigma_{i,t}$ utilizzato nel corso della fase di pricing. In grigio chiaro la volatilità “di breve termine” $\sigma_{i,t}^{EWMA,ST}$ ed in nero tratteggiato la volatilità di lungo termine nel rispetto di quanto presentato nel **Paragrafo 2.3.1**

³⁹ Tra parentesi si presentano le statistiche t

evidenziano valori medi di volatilità differenti, con i valori annualizzati di Enel e NEE molto simili tra loro (rispettivamente pari a 19,7% e 18,7%) inferiori rispetto al dato rilevato nel caso di VWS (33,7%) che si contraddistingue anche per una maggiore valore di σ^σ .

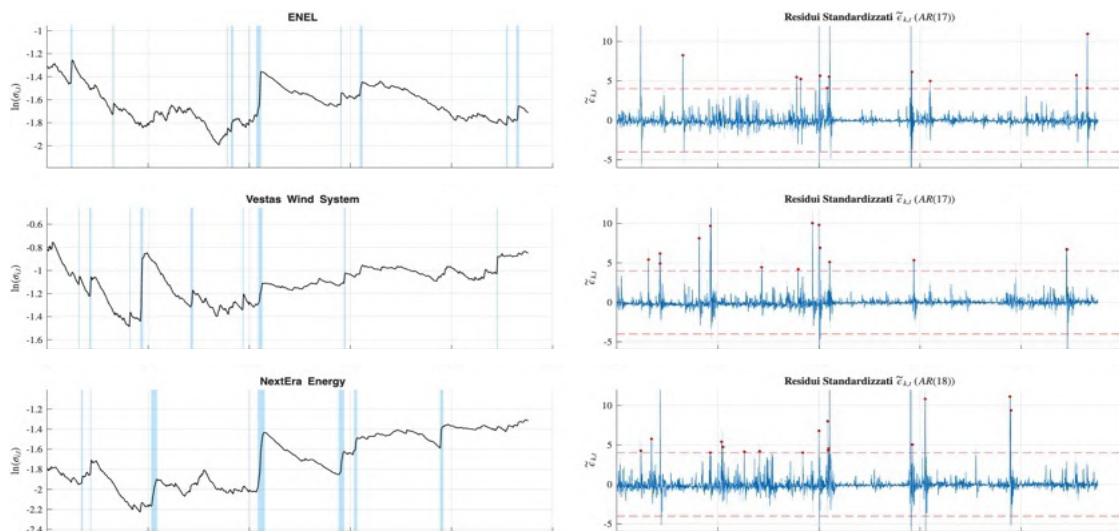
3.3. La simulazione dei Jumps

Definito l'assetto econometrico per la componente continua della volatilità, l'analisi si focalizza ora sull'identificazione e sulla modellizzazione dei Jump. Tale componente risulta essenziale per catturare le discontinuità nei prezzi e i picchi di volatilità particolarmente rilevanti per il corretto pricing degli investment certificates.

3.3.1. I jumps della volatilità

L'identificazione dei Jumps in volatilità, come sottolineato nella descrizione metodologica presentata nel **paragrafo 2.3.1**, prende avvio dall'analisi dei residui standardizzati del modello autoregressivo AR(p) applicato al proxy della volatilità implicita $\sigma_{i,t}$ al fine di individuare le finestre temporali in cui storicamente sono stati osservati tali fenomeni. Tale fase ha condotto all'individuazione di un modello AR(17) sia nel caso di Enel che per VWS e di un modello AR(18) per NEE. L'elevato ordine p individuato risulta a questi fini funzionale alla rimozione della marcata dipendenza seriale che appare evidente dall'osservazione delle serie storiche $\ln(\sigma_{k,t})$. Sulla base del modello individuato, vengono rappresentati i residui standardizzati $\tilde{\epsilon}_{k,t}$ oltre che le relative finestre di escalation $\mathcal{W}$ individuate a partire da valori che risultano eccedere la soglia τ_{vol} rappresentata in colore rosso nella **Figura 3.2**. L'analisi di tali eventi consente di stimare la frequenza λ_k nonché la magnitudo delle fasi di espansione della volatilità rilevate.

Figura 3.2 – Individuazione delle finestre di escalation $\mathcal{W}$ e rappresentazione dei residui standardizzati $\tilde{\epsilon}_{k,t}$



Nella **Tabella 3.4** si riportano i parametri così ottenuti, inclusi i coefficienti della distribuzione Gamma, funzionali alla calibrazione della successiva fase di simulazione in coerenza con l'assetto metodologico definito dall'**Equazione 69**.

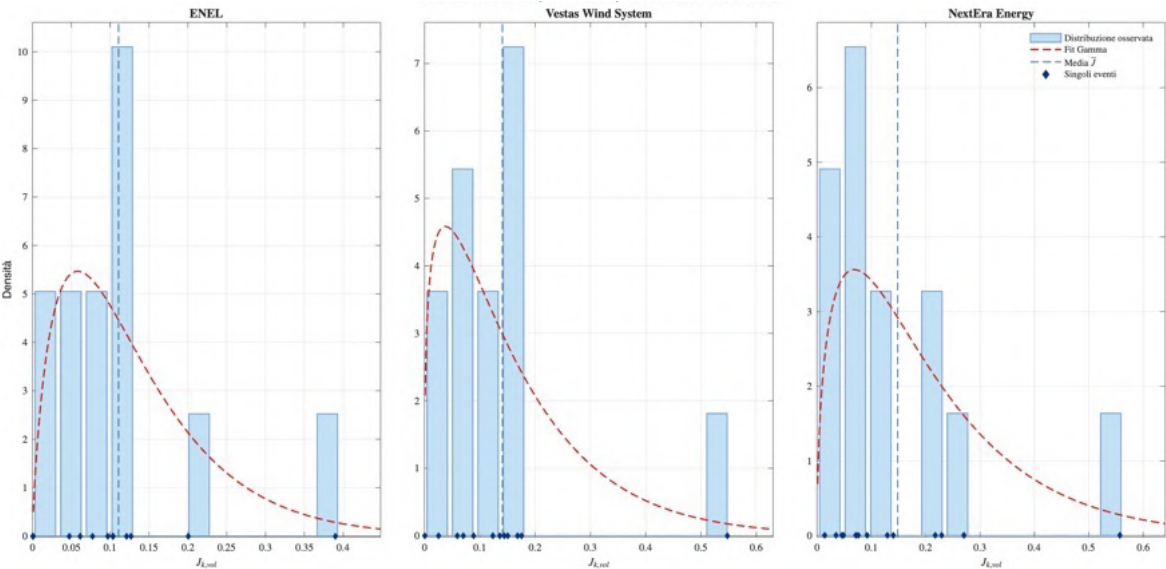
Tabella 3.4. – *Stima parametri alla base della simulazione dei Jumps di volatilità*

Sottostante	$\hat{\lambda}_k^{vol}$	$\bar{J}_{k,vol}$	s_{Jk}	$L_k(gg)$	$\hat{\alpha}_k$	$\hat{\beta}_k$
Enel	1.059	0.133	0.100	11.20	1.779	0.075
Vestas Wind System	1.059	0.163	0.143	9.60	1.299	0.126
NextEra Energy	0.847	0.204	0.166	18.25	1.507	0.135

L'intensità λ_k varia tra 0,847 e 1,059 eventi/anno, indicando una frequenza media di escalation compresa tra circa un evento ogni 14 mesi nel caso di NEE e circa un evento ogni 11 mesi per Enel e VWS. L'ampiezza media $\bar{J}_{k,vol}$ e la deviazione standard $\bar{s}_{J,k}$ risultano maggiori per NEE, suggerendo la presenza di eventi meno frequenti ma caratterizzati da un'intensità superiore. Al contrario, Enel si contraddistingue per una minore intensità di tali fenomeni, che in media presentano un'ampiezza pari a circa il 13% in termini logaritmici e una dispersione più contenuta rispetto agli altri sottostanti inclusi nel prodotto in esame. Si riportano inoltre i parametri $\hat{\alpha}_k$, $\hat{\beta}_k$ funzionali alla successiva fase di simulazione degli eventi di volatilità estrema di cui, nella **Figura 3.3**, si propone una rappresentazione della funzione di densità stimata sovrapposta all'osservazione degli eventi storicamente osservati. Tali parametri costituiscono la base per la modellizzazione delle ampiezze dei jumps, in coerenza con l'ipotesi di distribuzione Gamma validata anche dal test di Kolmogorov-Smirnov i cui risultati sono riportati in Annex in **Tabella A.02**.

[TABELLA A.02]

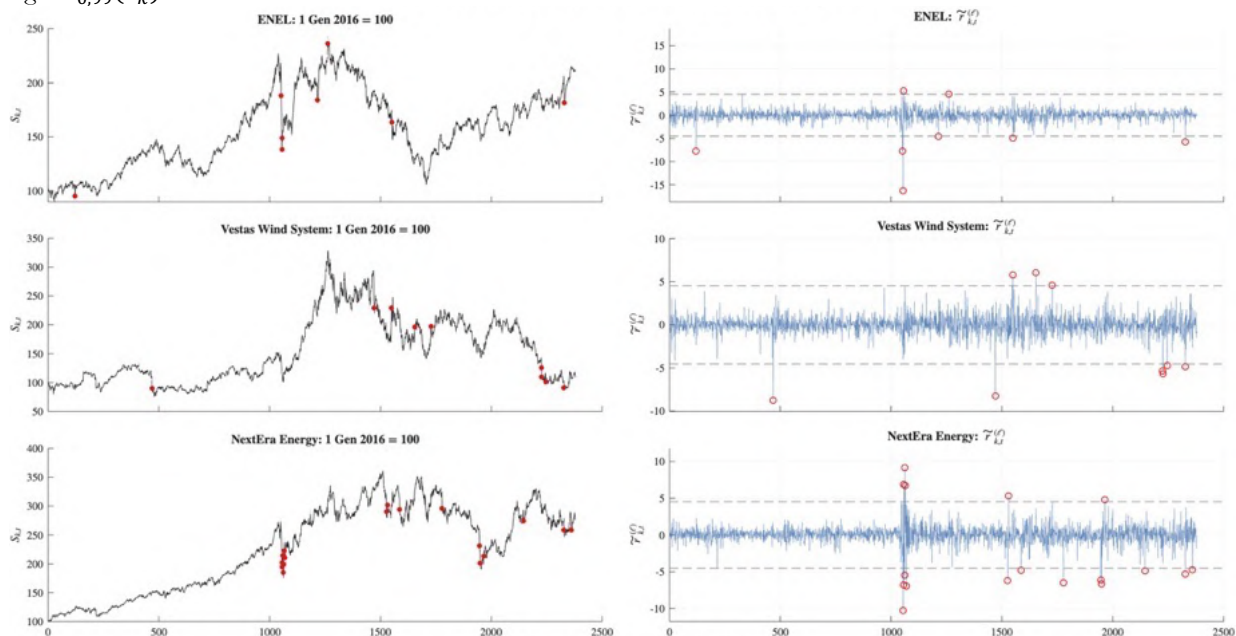
Figura 3.3 – *Distribuzione Jumps volatilità storici e funzione di densità Gamma per simulazione*



3.3.2. I jumps di prezzo

Come riportato nell'ambito del **Paragrafo 2.3.3**, L'identificazione dei jumps di prezzo $J_k^\uparrow - J_k^\downarrow$ si basa su un algoritmo threshold-based in cui i Jumps vengono identificati qualora un rendimento normalizzato $r_{k,t}/\sigma_k^{\text{diff}}$ ecceda la soglia $c_\alpha(T_k)$ derivata dalla distribuzione asintotica dei massimi dei rendimenti normalizzati⁴⁰. Tali eventi sono riportati nella **Figura 3.4**. Le serie storiche dei prezzi relative ai tre sottostanti comprendono 2379 osservazioni giornaliere ciascuna. In conformità con l'assetto analitico descritto nell'**Equazione 45** l'applicazione di un livello di significatività $\alpha = 0,99$ ha permesso di determinare una soglia critica $c_{0,99}(T_k)$ pari a 4,5288.

Figura 3.4 – Individuazione dei Jumps di prezzo $J_k^\uparrow$ e $J_k^\downarrow$ per i tre sottostanti del certificato NLBNPIT1UX66 sulla base della soglia $c_{0,99}(T_k)$ individuata



Successivamente all'identificazione dei jumps si procede alla stima dei parametri del modello di [Kou, 2002](#) che assume una distribuzione *double exponential* per le ampiezze dei jumps di prezzo.

⁴⁰ L'identificazione preliminare dei jumps utilizza una soglia di detection basata sulla distribuzione di Gumbel calibrata sull'intero campione storico e mantenuto stabile per l'intero periodo di rilevazione. Tale approccio, sebbene meno adattivo rispetto a metodologie rolling-window (Lee e Mykland, 2008), garantisce parsimonia nella parametrizzazione. Si riconosce che tale specificazione tende a sovrastimare la frequenza di jumps durante periodi di volatilità elevata (e a sottostimarla nei periodi di bassa volatilità ma questo approccio è stato preferito in quanto vengono naturalmente esclusi eventi $J_k^\uparrow - J_k^\downarrow$ di magnitudo poco rilevante comportando così una minor rappresentazione di eventi di coda nella simulazione Monte Carlo.

Nella **Tabella 3.5** vengono riportate le stime in riferimento ai tre sottostanti inclusi nel certificato analizzato.

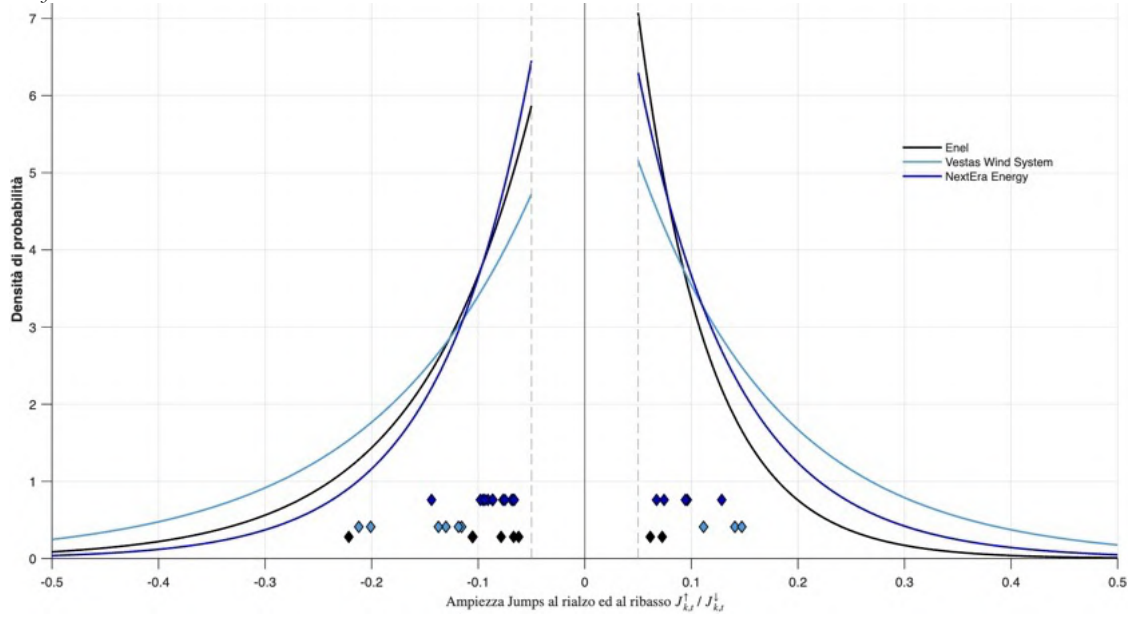
Tabella 3.5 – *Stima parametri alla base della simulazione dei Jumps di Prezzo (Up e Down)*

Sottostante	$\hat{\lambda}_k$	$\hat{p}_k$	$\eta_k^\uparrow$	$\eta_k^\downarrow$	$\bar{J}_k^\uparrow$	$\bar{J}_k^\downarrow$	κ_k
ENEL	0.847	0.250	14.906	9.386	0.067	0.107	-0.054
Vestas Wind System	0.953	0.333	7.513	6.561	0.133	0.152	-0.037
NextEra Energy	1.801	0.294	10.836	11.427	0.092	0.088	-0.027

L'analisi dei parametri stimati rivela differenze strutturali significative nella dinamica dei Jumps di prezzo che devono essere considerate nella fase successiva di simulazione. In particolare, l'intensità totale annua dei salti varia tra i titoli analizzati: NEE mostra una frequenza di accadimento relativamente elevata, pari a circa 1,8 eventi all'anno, mentre Enel e VWS presentano frequenze significativamente più basse, corrispondenti approssimativamente a un evento ogni 14 e 12 mesi, rispettivamente. L'incidenza dei jumps al rialzo risulta leggermente superiore per VWS ($\hat{p}_k = 0,33$ rispetto a NEE ed Enel. Considerando la magnitudo dei salti, i parametri di decadimento $\eta_k^\uparrow$ e $\eta_k^\downarrow$ della distribuzione double exponential suggeriscono che Enel è caratterizzata da rialzi con valore atteso condizionato maggiore ($\bar{J}_k^\uparrow \approx 0,067$) mentre NEE, pur mostrando la maggiore frequenza di salti, presenta ribassi di entità più contenuta ($\bar{J}_k^\downarrow \approx 0,088$). I valori attesi condizionati dei salti evidenziano inoltre come VWS sia soggetta alla maggiore variabilità degli shock estremi, al contrario di NEE che manifesta, invece, eventi più ricorrenti ma di intensità relativamente moderata che si traduce, inoltre, in un fattore compensativo κ_k più contenuto. Tutti e tre i sottostanti considerati presentano un fattore κ_k con segno negativo confermando una distribuzione delle ampiezze caratterizzata da una coda sinistra più pesante (Kou, 2002). Tale evidenza risulta chiara anche dal confronto dei profili di densità stimati riportati in **Figura 3.5**. Tale rappresentazione consente inoltre di visualizzare le caratteristiche distintive di ciascun sottostante mettendo a confronto i jumps $J_k^\uparrow$ - $J_k^\downarrow$ empiricamente osservati con la distribuzione di densità teorica del modello double exponential. La validazione statistica condotta tramite il test di Kolmogorov-Smirnov, riportata nella **Tabella A.03**, conferma la robustezza dell'ipotesi Double Exponential per la quasi totalità del paniere analizzato ad eccezione degli eventi $\bar{J}_k^\downarrow$ di NextEra Energy, i cui p-value risultano consistentemente superiori alla soglia critica del 5%.

[TABELLA A.03]

Figura 3.5 – Confronto tra distribuzioni teoriche *Double Exponential* e osservazioni empiriche dei jumps per i sottostanti del certificato NLBNPIT1UX66⁴¹

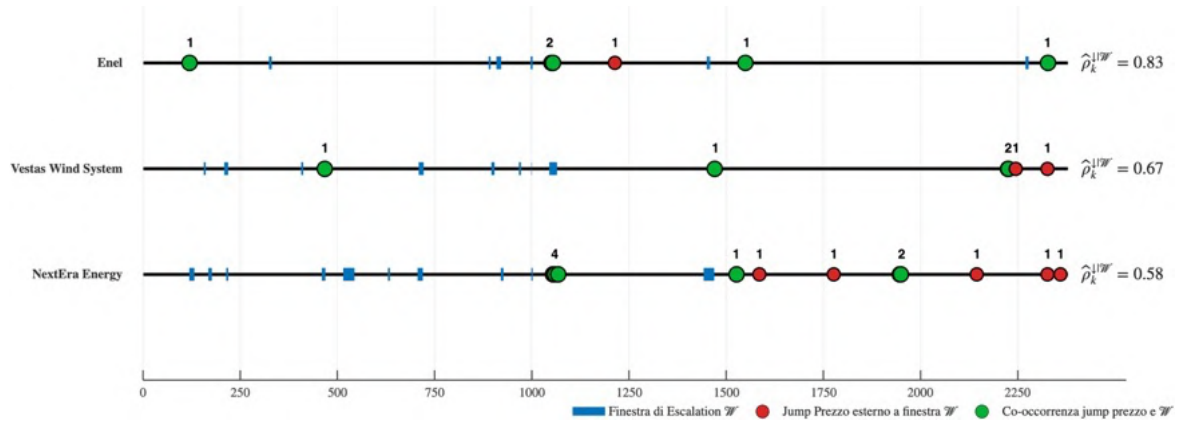


3.3.3. Analisi della co-occorrenza tra gli shock

Nell'ambito della simulazione Monte Carlo, dopo aver generato le caratteristiche tipiche dei jump nei prezzi e nella volatilità, è necessario stimare le probabilità di co-occorrenza p_k^{IW} , come descritto nel paragrafo metodologico. Tale stima risulta funzionale alla riallocazione temporale dei jumps al ribasso del prezzo dei sottostanti $N_{k,t}^{\downarrow}$ all'interno delle finestre di escalation di volatilità simulate al fine di rappresentare all'interno del framework proposto, la non indipendenza di tali eventi. Nella **Figura 3.6** viene rappresentato a questo fine ed in considerazione ai tre sottostanti analizzati, l'inclusione o meno degli eventi $J_k^{\downarrow}$ storicamente osservati all'interno delle finestre di escalation di volatilità $\mathcal{W}$ storicamente osservate al fine di consentire la stima della probabilità di co-occorrenza p_k^{IW} riportati all'interno della stessa rappresentazione.

⁴¹ La figura confronta, per ciascun sottostante del certificato considerato, le distribuzioni di densità teoriche del modello *Double Exponential* con le ampiezze dei jumps empiricamente osservate, distinguendo tra eventi al rialzo e al ribasso. La stima evidenzia una marcata asimmetria delle distribuzioni, coerente con valori negativi del parametro di asimmetria κ_k , e una maggiore pesantezza della coda sinistra. I punti rappresentano le realizzazioni empiriche dei jumps, mentre le curve continue indicano le densità teoriche stimate.

Figura 3.6 – analisi co-occorrenza eventi J_k^l ed eventi di escalation di volatilità $\mathcal{W}^{42}$



3.4. Stima del leverage effect

Considerare le interazioni tra variazioni di prezzo e variazioni di volatilità risulta rilevante non soltanto in presenza di discontinuità nei prezzi o nella volatilità, ma più in generale nella modellizzazione della dinamica congiunta di queste due componenti. È infatti ampiamente documentato in letteratura (Black, 1976; Christie, 1982) come shock negativi sui prezzi tendano a essere associati successivi incrementi di volatilità. In linea con la specificazione teorica introdotta nell'*Equazione 84* la quantificazione empirica del leverage effect $\rho_k^{lv\bar{g}}$, rilevante per la successiva fase di simulazione delle traiettorie dei diversi sottostanti, viene condotta mediante regressione lineare della variazione logaritmica di volatilità sui rendimenti giornalieri. Tali stime, sono riportate nella **Tabella 3.6**⁴³.

Tabella 3.6 – stima parametri *Regressione 81* funzionale alla rilevazione del *Leverage Effect*

Asset	$\hat{\alpha}_k$	$\hat{\beta}_k^{lv\bar{g}}$	$SE(\hat{\beta}_k^{lv\bar{g}})$	t -stat	p -value	$N.obs$	$\rho_k^{lv\bar{g}}$
Enel	-0.0002	-0.044**	0.0220	-2.01	0.044	2378	-0.143
Vestas Wind System	-0.0000	-0.021	0.0144	-1.45	0.147	2378	-0.092
NextEra Energy	0.0002	-0.043**	0.0191	-2.25	0.024	2378	-0.146

Tali stime evidenziano una correlazione negativa tra rendimenti e variazioni di volatilità per tutti i sottostanti, statisticamente significativa al livello del 5% nel caso di Enel e NextEra Energy. Per Vestas Wind System il coefficiente risulta negativo ma non statisticamente significativo (p -value 0,147), suggerendo un leverage effect più debole. Tali coefficienti, vengono successivamente convertiti, mediante l'*Equazione 85* nella stima della correlazione $\rho_k^{lv\bar{g}}$ utilizzata, nell'ambito della simulazione Monte Carlo al fine di mettere in relazione le innovazioni di prezzo $Z_{k,t}^{corr}$ e di volatilità $Z_{k,t}^{vola}$ così come

⁴² In colore verde si rappresentano i jumps di prezzo avvenuti in concomitanza con una fase di escalation di volatilità ed in rosso quando questa co-occorrenza non è stata rilevata. Le campiture blu rappresentano le finestre di espansione di volatilità.

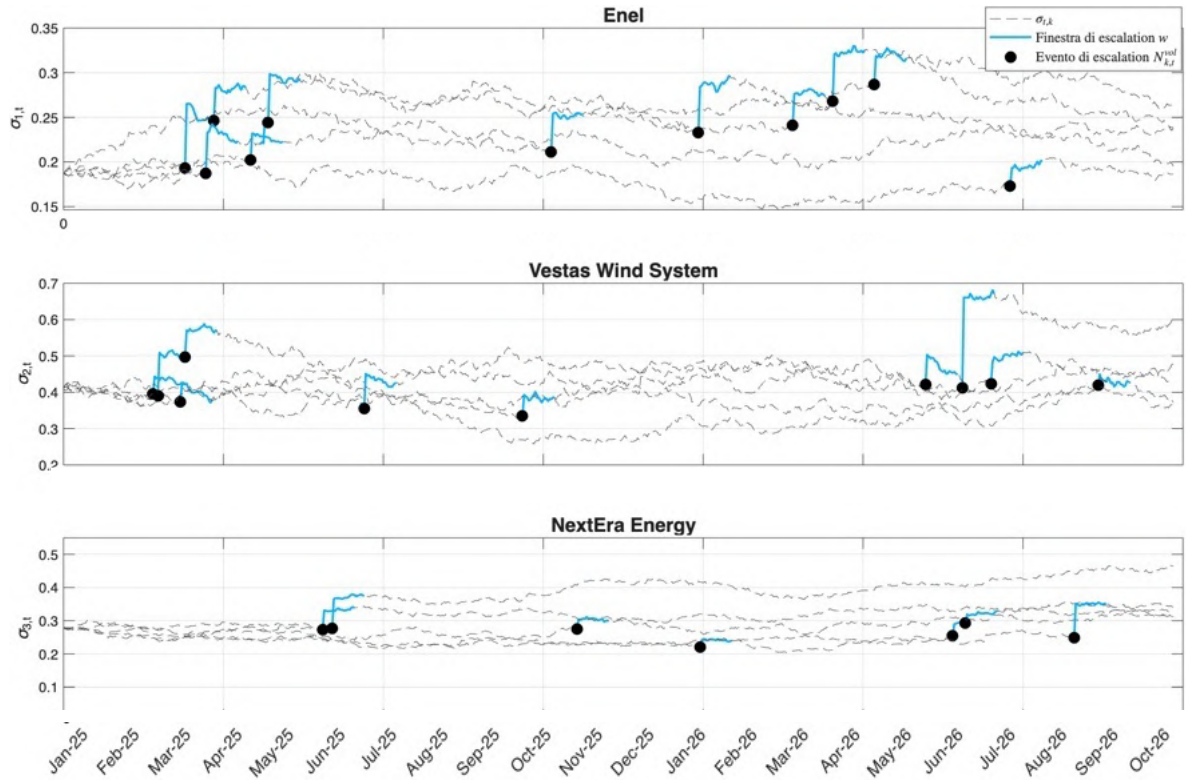
⁴³ Data la natura time-series dei dati, gli errori standard sono stimati mediante la procedura di Newey-West (1987) utilizzando un numero di lag pari a $l = 5$.

evidenziato nell'*Equazione 85*. I valori di correlazione stimati risultano inferiori rispetto alle stime tipiche per titoli azionari riportate in letteratura. Tale discrepanza può essere ricondotta, come già discusso, all'utilizzo del proxy della volatilità implicita $\sigma_{i,t}$ anziché la volatilità realizzata calcolata anche da dati intraday e ad alta frequenza.

3.5. Simulazione della dinamica stocastica della volatilità

Prendendo come riferimento la giornata t_{k0} di martedì 2 gennaio 2024 e dopo aver stimato tutti i parametri necessari, risulta possibile procedere con la simulazione dell'andamento stocastico della volatilità il cui punto di partenza si attesta al valore di $\sigma_{k,2-gen-24}$ rilevato in riferimento a ciascuno dei k Asset in tale giornata. In tale circostanza, il più alto livello del proxy della volatilità implicita è quella riconducibile a VWS pari a 0,4126. Come si evidenzia nelle precedenti stime, l'utility danese risulta anche essere caratterizzata dalla maggior frequenza attesa di eventi di escalation di volatilità λ_k e da una maggior velocità di mean reversion κ_k tra i sottostanti inclusi nel certificate in esame. Tali caratteristiche appaiono evidenti dall'analisi dei 5 path di $\sigma_{k,i}$ rappresentati per ciascun sottostante nella *Figura 3.7*. Al contrario, in riferimento a NextEra Energy, la scarsa significatività di κ_{NEE} declassa la componente mean reverting del modello, approssimando la traiettoria della volatilità a un random walk. Tale evidenza empirica implica un riassorbimento estremamente lento della volatilità stimata successivamente ad ogni singolo evento di escalation. Di conseguenza, le seppur rare fasi di espansione della volatilità manifestano una forte persistenza, producendo ripercussioni sulla simulazione per un lasso temporale significativamente più esteso rispetto agli altri sottostanti. L'orizzonte di simulazione si estende, per 698 giorni di borsa aperta t_k compresi tra la data di valutazione t_{k0} 2 gennaio 2024 e la scadenza del certificato t_k prevista nella giornata del 5 ottobre 2026. In tale rappresentazione, i marcatori neri segnalano gli eventi di *escalation* della volatilità i Quali, diversamente dagli shock che incidono sul prezzo degli asset, mostrano una natura esclusivamente unidirezionale.

Figura 3.7 – Simulazione di $n.5$ traiettorie stocastiche della volatilità in riferimento agli $n^{\circ}3$ sottostanti alla base del certificato NLBNPIT1UX66



3.6. Modellizzazione e simulazione della struttura di dipendenza multivariata

Come anticipato nella introduzione teorica, la corretta replica della struttura di correlazioni nei certificati multi-asset rappresenta un elemento di primaria importanza per il corretto pricing dei certificati di investimento. Anche in questo caso, il punto di partenza è rappresentato dalle serie storica dei rendimenti logaritmici giornalieri $r_{i,t}$ dei diversi asset e dal successivo calcolo della correlazione rolling a 20 giorni $\rho_{ij}(\tau)$ tra gli stessi riportata su base quotidiana nella matrice delle correlazioni empiriche Ψ^{44} . Nella **Figura 3.8** vengono rappresentate, nella riga superiore, le distribuzioni delle correlazioni reciproche tra i tre asset in esame ottenute considerando i singoli vettori $\rho^{(p)}$ di Ψ . Dall'analisi emerge chiaramente come la correlazione maggiore tra gli asset in esame sia rilevabile nella coppia Enel-NEE che evidenzia la probabilità più alta di osservare fasi di mercato con correlazioni elevate (26% delle giornate con $\rho_{Enel-NEE}(\tau) > 0,7$ vs. il 22% osservato per le altre due coppie di sottostanti). Al contrario, la coppia VWS-NEE presenta il minor livello di correlazione essendo inoltre l'unica coppia per cui si è registrato un andamento anticorrelato ($\rho_{j-i}(\tau) < 0$) per più del 30% delle osservazioni (τ). Tale informazione costituisce il fondamento per l'introduzione della struttura delle correlazioni time-varying

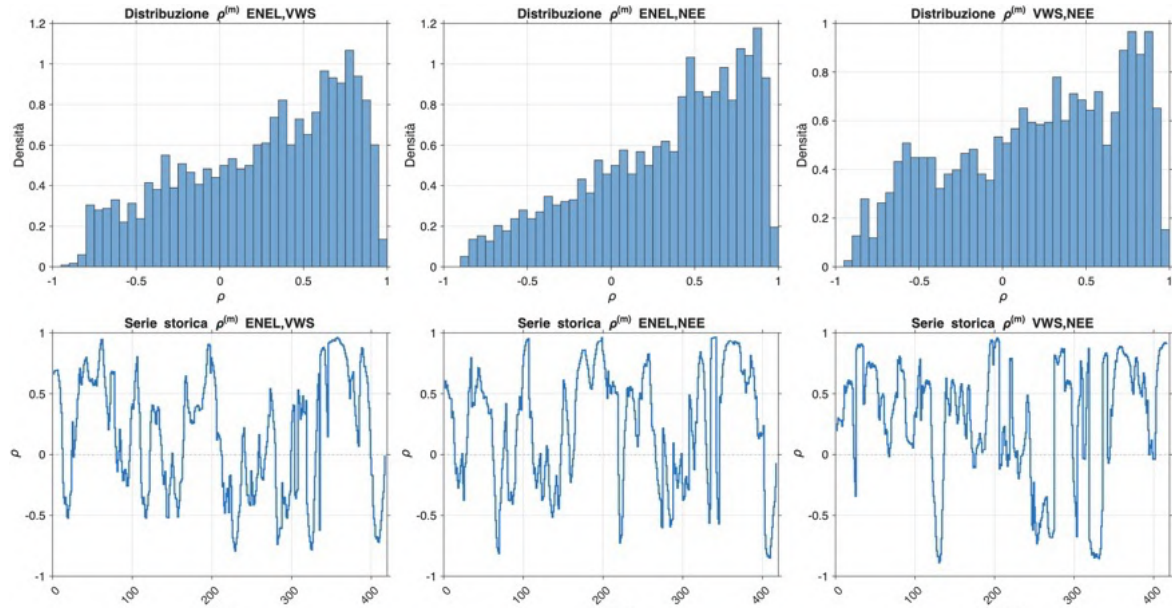
⁴⁴ Nella matrice Ψ figura anche l'indice di riferimento (SPX500) in quanto, come discusso nella sezione teorica, risultano rilevanti anche le correlazioni tra tale asset ed i diversi sottostanti.

all'interno del framework proposto. Come approfondito nella sezione teorica, l'evoluzione della correlazione nel tempo è modellata tramite un processo di selezione a blocchi:

$$\rho^{(p)} \in \mathbb{R}^{k(k-1)/2}, \quad p = 1, \dots, P \quad (116)$$

Dove ogni $\rho^{(p)}$ viene generato mediante la metodologia Stationary Bootstrap di [Politis e Romano, 1994](#) applicato alla matrice delle correlazioni empiriche Ψ in linea con quanto presentato nella descrizione metodologica presentata nel **Paragrafo 2.3.2**. Nella seconda riga della **Figura 3.8**, si mostra infine l'evoluzione temporale della struttura $\rho^{(p)}$ ottenuta mediante tale metodo, funzionale ad alimentare la simulazione Monte Carlo delle traiettorie degli asset.

Figura 3.8 – *Distribuzione correlazioni storiche e correlazioni simulate*



Avendo a questo punto a disposizione sia le stime della correlazione $\rho^{(p)}$ così come quelle della volatilità $\sigma_{i,t}$, risulta possibile calcolare su base quotidiana la matrice di covarianza Σ_t funzionale alla generazione delle innovazioni correlate da impiegare nella simulazione Monte Carlo in coerenza con le ipotesi del modello.

3.7. Simulazione Monte Carlo delle traiettorie dei sottostanti

Ottenuti così tutti parametri funzionali alla simulazione delle traiettorie degli asset, l'obiettivo primario risulta essere il popolamento della matrice tridimensionale $\mathbb{S} \in R^{m \times t_K \times i}$ che raccoglie, per ciascun sottostante $i = 1, \dots, n$ i prezzi simulati nello scenario $m = 1, \dots, 200$ per ogni data t_k compresa tra la data di valutazione corrente t_{k0} e la data di scadenza dello strumento t_K .

Per ciascun sottostante $i = 1, \dots, n$ e per ogni scenario $m = 1, \dots, 200$ i prezzi iniziali $S_{i,0}^{(m)}$ sono fissati al valore al valore di mercato osservato alla stessa data di valutazione t_{k0} . Questo rappresenta il punto di partenza comune delle traiettorie simulate in relazione ai diversi asset. Ai nostri fini, non risulta rilevante il valore assoluto dei prezzi simulati ma bensì la loro rappresentazione $P_{i,tk}^{(m)}$ in funzione del prezzo K_i rilevato nella data di Settlement come evidenziato nell'**Equazione 3**.

Prendendo come esempio sempre la giornata di negoziazione t_{k0} di martedì 2 gennaio 2024, in cui i tre sottostanti Enel, VWS e NEE hanno registrato, alla chiusura, rispettivamente i valori per azione di 6,70 €, 209,65 € e 61,57 \$ e considerando i prezzi di Settlement riportati nella **Tabella 3.2**, si ottengono i seguenti prezzi normalizzati $P_{k,2-gen-24}$:

$$P_{Enel,2-gen-24} = 1,2161, \quad P_{VWS,2-gen-24} = 1,5076, \quad P_{NEE,2-gen-24} = 1,1665 \quad (117)$$

Nella **Figura 3.9** si presenta l'andamento simulato per un campione rappresentativo di $m = 5$ traiettorie, estratte dall'insieme completo di 200 scenari⁴⁵ Monte Carlo generati per il processo stocastico multivariato dei sottostanti. Contestualmente, per ciascun scenario m , con $\forall m \in \{1, \dots, 5\}$ viene individuato l'asset Worst-off in conformità con quanto presentato nell'**Equazione 4**

$$P_{\text{worst},tk}^{(m)} = \min\{P_{Enel,tk}^{(m)}, P_{VWS,tk}^{(m)}, P_{NEE,tk}^{(m)}\}, \quad m = 1, \dots, 5 \quad (118)$$

Tale riconduzione risulta rilevante per la determinazione di tutti i flussi di cassa condizionati tipici dello strumento in esame. Tale rilevazione, in riferimento ai cinque scenari d'esempio, viene rappresentata nella **Figura 3.10** con evidenza dell'asset worst-of.

Osservando le diverse simulazioni presentate, ben si notano le differenti caratteristiche intrinseche dei diversi sottostanti. Come atteso, l'azione VWS si contraddistingue per la maggiore volatilità all'interno del paniere considerato: la sua inclusione tra i sottostanti ha consentito all'emittente di strutturare un prodotto caratterizzato da significativi flussi cedolari. La **Figura A.01**, riportata nella *Sezione Annex*, mostra come questo sottostante presenti anche la più elevata probabilità di terminare alla scadenza al di sotto della barriera, configurandosi così come il principale driver di prezzo nel contesto del certificato considerato.

[FIGURA A.01]

L'azione Enel, pur essendo caratterizzata da una volatilità relativamente contenuta, presenta un dividend yield elevato⁴⁶. Questo contribuisce a ridurre il drift del sottostante, senza tuttavia aumentare in modo significativo il rischio di perdita della protezione del capitale a scadenza come rappresentato in **Figura A.01**.

⁴⁵ Il numero di 200 iterazioni è stato definito in funzione di limiti computazionali nella fase di calcolo. Nel **Paragrafo 3.8** verrà offerta una panoramica sulla precisione di tali stime.

⁴⁶ Il dividend yield di Enel, VWS, NEE risulta essere rispettivamente pari al 6,1%, 0,5%, 2,9%

Figura 3.9 – Rappresentazione di 5 scenari simulati, certificato NLBNPIT1UX66, t_{k0} = 2 gennaio 2024⁴⁷

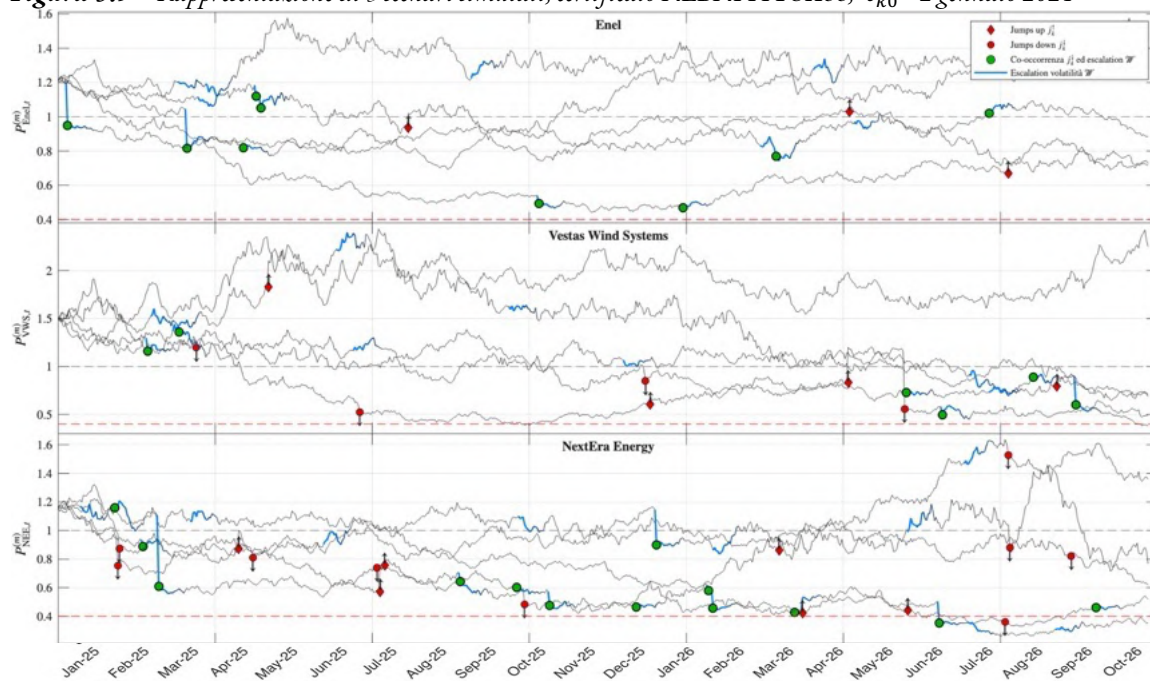
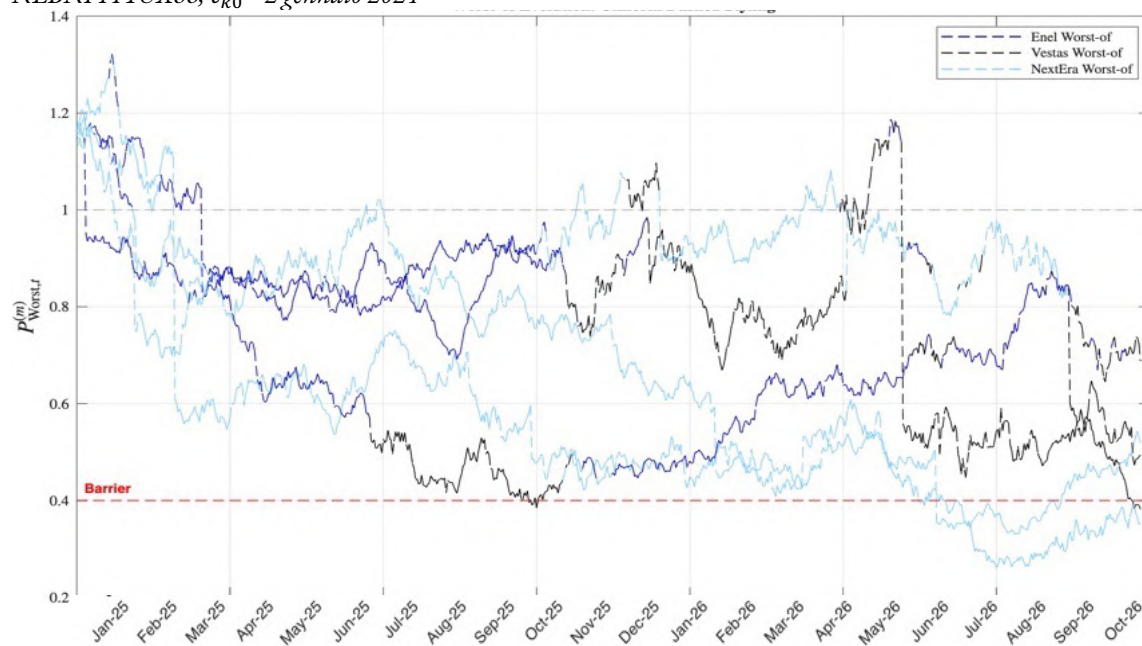


Figura 3.10 – Simulazione del sottostante worst-of sulla base degli scenari riportati in Figura 2.4, certificato NLBNPIT1UX66, t_{k0} = 2 gennaio 2024⁴⁸



⁴⁷In **Figura 3.9** si rappresenta l'andamento simulato dei tre sottostanti evidenziando in colore verde gli eventi di co-occorrenza tra i Jumps di Prezzo (rappresentati in rosso quando isolati) e gli eventi di escalation di volatilità $\mathcal{W}$ (rappresentati in colore azzurro). La linea orizzontale tratteggiata in rosso rappresenta la Barriera per la protezione del capitale a scadenza.

⁴⁸I colori utilizzati in **Figura 3.10** risultano funzionali ad individuare l'Asset Worst Of determinante per la valutazione dei flussi di cassa condizionali

3.7.1. Ricostruzione dei flussi di cassa

Sulla base degli scenari simulati risulta possibile, a questo punto, ottenere i vettori dei flussi di cassa $\overrightarrow{CF^{(m)}}(2 \text{ gennaio } 2024)$. In continuità con quanto sopra, vengono rappresentati i flussi degli stessi cinque scenari simulati a partire dalla stessa giornata di negoziazione. Il prezzo di chiusura del certificato NLBNPIT1UX66 nella giornata di negoziazione t_{k0} del 2 gennaio 2024 è stato pari a 105,05 €. Tale ammontare corrisponde all'uscita di cassa che l'investitore deve sostenere per l'acquisto del prodotto in tale circostanza. Nell'ambito del framework presentato e nel computo delle successive risultanze, non si considera alcuno spread o commissione d'acquisto. I successivi flussi di cassa risultano interamente guidati dalle simulazioni condotte.⁴⁹

Tabella 3.7 – Flussi di cassa rappresentativi dei 5 scenari simulati, certificato NLBNPIT1UX66, $t_{k0} = 2 \text{ gennaio } 2024$

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34
-104,45	0,93	0,93	0,93	100,93	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
-104,45	0,93	0,93	0,93	0,93	0,93	0,93	0,93	0,93	0,93	0,93	0,93	0,93	0,93	0,93	0,93	0,93	0,93	0,93	0,93	0,93	0,93	0,93	0,93	0,93	0,93	0,93	0,93	0	0	0	0	4,65	0,93	100,93
-104,45	0,93	0,93	0,93	0,93	0,93	0,93	0,93	0,93	0,93	0,93	0,93	0,93	0,93	0,93	0,93	0,93	100,93	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
-104,45	0,93	0,93	0,93	100,93	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
-104,45	0,93	0,93	0,93	0,93	0,93	0,93	0,93	0,93	0,93	0,93	0,93	0,93	0,93	0,93	0,93	0,93	0,93	0,93	0,93	0,93	0,93	0,93	0,93	0,93	0,93	0,93	0,93	0,93	0,93	0,93	0,93	0,93	0,93	100,93

Nota sul Riferimento Temporale (t): $t=0$: 02/01/24; $t=1$: 12/01/24; $t=2$: 14/02/24; $t=3$: 13/03/24; $t=4$: 12/04/24; $t=5$: 14/05/24; $t=6$: 12/06/24; $t=7$: 12/07/24; $t=8$: 14/08/24; $t=9$: 12/09/24; $t=10$: 14/10/24; $t=11$: 04/11/24; $t=12$: 03/12/24; $t=13$: 03/01/25; $t=14$: 03/02/25; $t=15$: 03/03/25; $t=16$: 03/04/25; $t=17$: 06/05/25; $t=18$: 03/06/25; $t=19$: 03/07/25; $t=20$: 04/08/25; $t=21$: 03/09/25; $t=22$: 03/10/25; $t=23$: 03/11/25; $t=24$: 03/12/25; $t=25$: 05/01/26; $t=26$: 03/02/26; $t=27$: 03/03/26; $t=28$: 07/04/26; $t=29$: 05/05/26; $t=30$: 03/06/26; $t=31$: 06/07/26; $t=32$: 03/08/26; $t=33$: 03/09/26; $t=34$: 05/10/26.

Così facendo, per ogni scenario m , è possibile determinare il prezzo teorico del certificato $V_{(2 \text{ gennaio } 2024)}^{(m)}$ attualizzando i flussi di cassa di riferimento utilizzando come tasso di sconto il rendimento dei titoli di stato tedeschi a tre mesi rilevato nella giornata t_{k0} del 2 gennaio 2024 pari a 3,67%. Il prezzo stimato dal modello nella giornata d'esempio, in coerenza con il metodo Monte Carlo, risulta essere pari alla media dei 200 scenari simulati:

$$V_{(2 \text{ gennaio } 2024)}^{MC} = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M V_{(2 \text{ gennaio } 2024)}^{(m)} = 100,86 \text{ €} \quad (119)$$

Tale valore, considerando il prezzo di mercato dello strumento nella stessa giornata pari a 104,45 € è rappresentativo di un markup Π_t del 3,44 % ed un markup annualizzato Π_t^{Ann} del 1,23%.

⁴⁹ I flussi in esame, presentati nella **Tabella 3.7** evidenziano che, per due dei cinque scenari considerati, l'evento di autocall si verifica già alla prima data di osservazione disponibile (12 aprile 2024). È altrettanto evidente l'effetto della clausola memory: in uno degli scenari simulati, al momento di una determinata data di osservazione della cedola condizionale, il valore del sottostante worst-of risulta inferiore al relativo trigger. Tale flusso viene tuttavia riconosciuto alla successiva data di osservazione, al ripristinarsi delle condizioni minime stabilite contrattualmente. In tutti e cinque gli scenari rappresentati, anche nelle condizioni più avverse, la condizione di protezione del capitale a scadenza non viene mai violata.

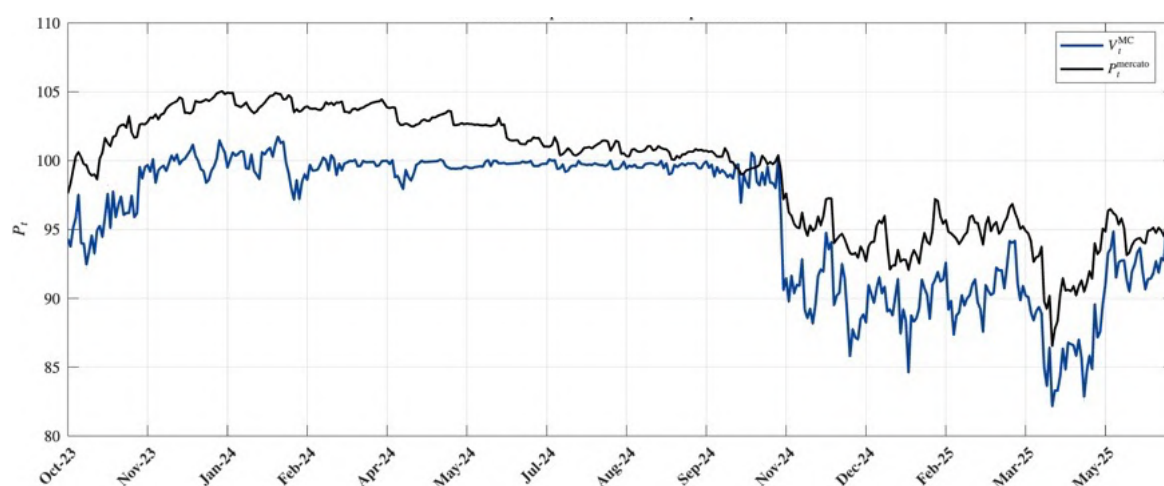
****In Figura 3.10** sono evidenti 2 casi in cui il valore del sottostante Worst-of alla data di scadenza risulta inferiore alla soglia di Barriera. Tali eventi non risultano comunque rilevanti in quanto, per le simulazioni di riferimento, il certificato non risulta negoziato in quanto interessato da un Evento di Autocall.

3.7.2. Markup e misura sintetica di rischio

Ancora più informativa risulta l'analisi dell'evoluzione temporale di tali metriche, resa possibile iterando la procedura descritta per tutte le giornate t comprese tra la data di emissione t_0 e l'ultima osservazione storica disponibile T . Tale analisi non consente solo di verificare la stabilità del modello ma risulta funzionale anche all'individuazione di eventuali fasi in cui il prezzo stimato V_t^{MC} dovesse discostarsi dal prezzo di mercato storicamente osservato P_t^{mercato} .

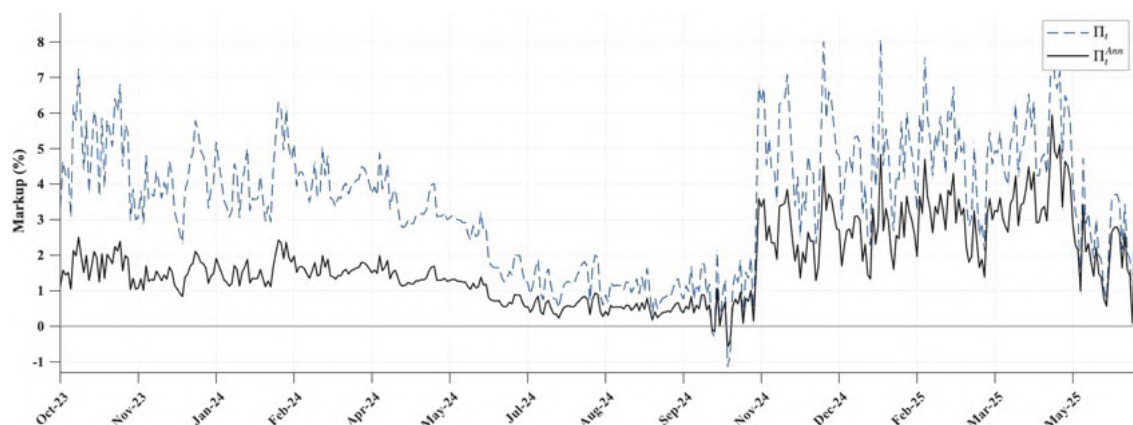
Nello sviluppo dell'elaborato si verificherà se il relativo markup Π_t contenga delle informazioni utili a stimare il futuro rendimento dello strumento o se si tratta questa di una informazione non rilevante a fini operativi. Nella **Figura 3.11** si propone il confronto tra le serie storica del certificato ed i prezzi stimati a valle del processo di pricing.

Figura 3.11 – Confronto tra prezzo di borsa e prezzo stimato dall'emissione all'ultima rilevazione storica disponibile (19 giugno 2025)



Tale delta risulta ancora più evidente nella vista presentata nella **Figura 3.12** dove viene presentata l'evoluzione del markup implicito Π_t e dello stesso indicatore nella forma annualizzata Π_t^{Ann} che è stato stimato per lo strumento oggetto dell'esempio dal giorno di emissione fino all'ultima rilevazione storica disponibile.

Figura 3.12 – Markup implicito e markup implicito annualizzato tra prezzo teorico e prezzo di borsa



Dall'analisi risulta evidente che tale certificato, sulla base delle ipotesi descritte, è caratterizzato da un markup Π_t^{Ann} compreso in un intervallo tra l'1% e il 4% in linea con quanto evidenziato in letteratura in riferimento ai prodotti strutturati negoziati in altri mercati (Stoimenov e Wilkens, 2005; Hernández, et al., 2007). Nel caso in esame, il markup tende ad aumentare in concomitanza con la discesa del prezzo di VWS e con la conseguente maggiore incertezza intrinseca a questo tipo di struttura nel nuovo contesto di mercato. Risulta significativo, a questo fine, evidenziare l'evoluzione della misura sintetica di rischio $\mathfrak{R}_t$ per quanto riguarda il certificato in esame.

Come evidenzia la **Figura 3.13**, quest'esempio ben rappresenta la necessità di prevedere un indicatore di rischio dinamico, capace di catturare dinamicamente le variazioni del contesto di mercato. BNP Paribas, al momento dell'emissione, ha attribuito a tale strumento un livello di rischio *SRI* pari a 6 su una scala massima di 7. Tale valutazione, che rimarrà stabile per tutto il ciclo di vita dello strumento, risulta coerente e prossima al valore restituito dalla misura sintetica di rischio proposta $\mathfrak{R}_t$ nella sua prima rilevazione. L'incremento delle quotazioni dei tre sottostanti registrato nel primo trimestre di vita dello strumento ha contribuito però ad una significativa riduzione del profilo di rischio complessivo. La successiva riduzione delle quotazioni di VWS nel secondo semestre del 2024, culminata in un decremento di oltre il 25% del valore del titolo in corrispondenza della pubblicazione dei risultati trimestrali del 5 novembre 2024, ha messo in discussione l'efficacia della protezione condizionale del capitale a scadenza. Come evidenziato dalla **Figura 3.14**, questo è dovuto al decremento di P_{VWS} dal massimo di 1,5461 registrato nella giornata di giovedì 28 dicembre 2023 al minimo di 0,5970 registrato nella giornata del 9 aprile 2025⁵⁰. In quest'ultima data, mancando ancora 544 giorni alla scadenza del prodotto, le probabilità stimate di osservare un valore a scadenza inferiore alla soglia *Barrier*, così come riportato nella **Figura A.01** presente in *Sezione Annex*, hanno superato il 40%. Un tale evento

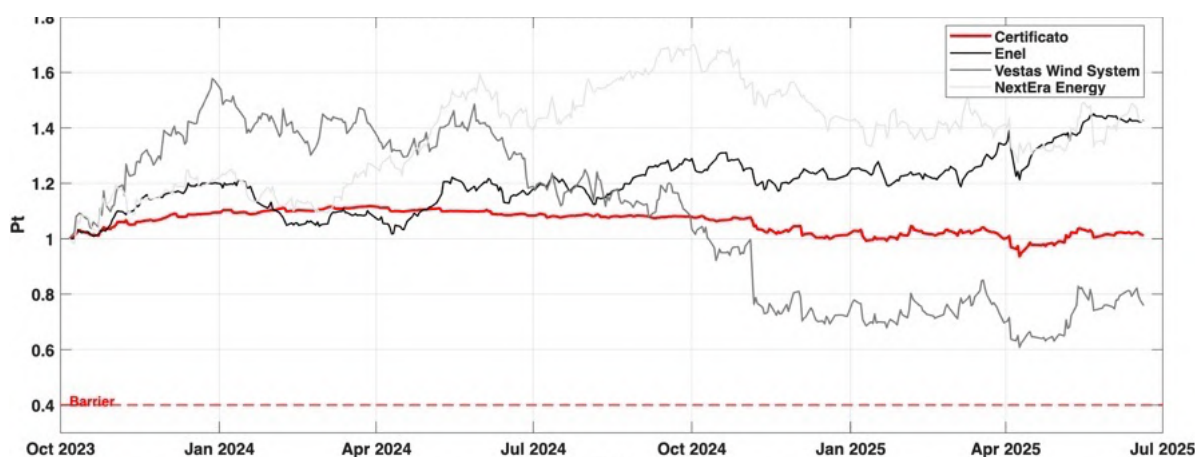
⁵⁰ Si tratta di una dinamica delle quotazioni estremamente marcata e difficilmente prevedibile ex-ante (la capitalizzazione di mercato di VWS si è ridotta di 2/3 nel periodo di riferimento). Il repentino deterioramento del profilo di rischio dello strumento, evidenziato dal passaggio da livelli prossimi al minimo a valori medio-alti, come mostrato in **Figura 3.13**, risulta pienamente spiegabile all'interno di questo contesto.

comporterebbe una compromissione della protezione del capitale a scadenza, con una perdita superiore al 60% del valore nominale dello strumento. La probabilità che gli altri due sottostanti si trovino alla scadenza a un livello inferiore rispetto alla barriera risulta trascurabile e mostra una tendenza decrescente nel tempo.

Figura 3.13– Confronto tra la Misura sintetica di rischio $\mathcal{R}_t$ e l'indicatore SRI, certificato NLBNPIT1UX66



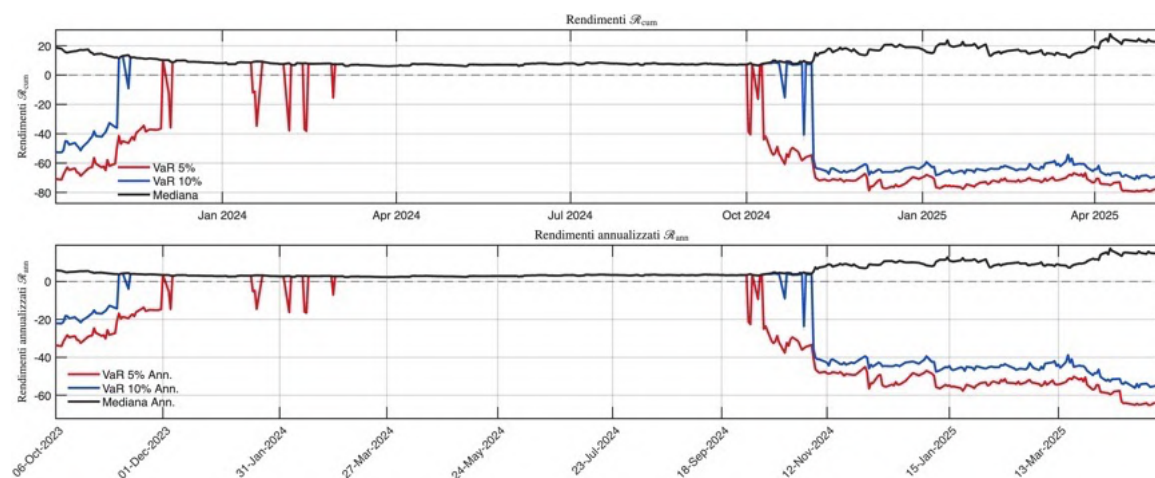
Figura 3.14 – Evoluzione delle quotazioni dei tre sottostanti rispetto al valore di emissione e rendimento prodotto⁵¹



Il cambiamento nella natura dello strumento risulta evidente anche dell'evoluzioni temporali di ε_{cum} ed $\varepsilon_{annuale}$ rappresentativi della distribuzione dei rendimenti simulati a scadenza $\mathcal{R}_{cum,t}$ ed annualizzati $\mathcal{R}_{annuale,t}$. Nello specifico, nella **Figura 3.15**, vengono proposti i rendimenti rolling simulati rappresentativi dell'investimento nel certificato in esame acquistando lo strumento nei diversi giorni di negoziazione e mantenendolo in portafoglio fino alla sua naturale scadenza. Vengono riportati il rendimento mediano e i rendimenti corrispondenti ai percentili di rendimento rappresentativi del VaR 5% e 10%. Tale rappresentazione evidenzia, anche mediante questo modello, il fondamentale trade-off tra rischio e rendimento, tipico di tutti gli strumenti finanziari.

⁵¹ Il rendimento del certificato (linea rossa) include tutti i dividendi ricevuti, reinvestiti a partire dal primo giorno disponibile al tasso risk free

Figura 3.15 – Rendimenti simulati rolling rappresentativi dell'investimento nel certificato NLBNPIT1UX66



Nel periodo compreso tra dicembre 2023 e settembre 2024, il rendimento annualizzato atteso si stabilisce nell'intervallo 2,5% - 3,0%. A seguito dell'evento già discusso del 5 novembre 2024, la natura di tale strumento è mutata in maniera significativa evidenziando la possibilità di incorrere in una perdita in conto capitale superiore al 60% del valore dello strumento nel 10% dei casi più sfavorevoli. A partire da tale circostanza, il rendimento mediano annualizzato si è attestato stabilmente a valori superiori al 15%.

3.7.3. Precisione nella stima

Come anticipato, nell'ambito dell'analisi empirica presentata, le simulazioni Monte Carlo sono state condotte considerando un numero massimo di 200 iterazioni. Sebbene tale numerosità risulti significativamente inferiore rispetto agli standard comunemente riportati in letteratura, questa scelta si è resa necessaria nel contesto della presente ricerca empirica. In particolare, la valutazione quotidiana dei certificates, in quanto spesso caratterizzati da più sottostanti e da payoff path-dependent, richiede la simulazione dell'intero percorso evolutivo di ciascun sottostante. Inoltre, al contrario della maggior parte delle opzioni più negoziate, i certificati sono prodotti finanziari caratterizzati da durate pluriennali. Nell'ambito della metodologia proposta, il prezzo di ciascun certificate non viene stimato solo alla data corrente, ma viene stimato partendo da ogni giornata storica disponibile, simulando i percorsi di tutti i sottostanti fino alla scadenza del prodotto al fine di monitorare quotidianamente l'evoluzione temporale dei prezzi e del markup. Questa procedura implica che, nel caso di un prodotto con quattro sottostanti e una scadenza di 5 anni, il numero di prezzi simulati raggiunge, pur limitandosi a 200 iterazioni, circa **635 milioni di valori**, a cui si aggiungono le stime quotidiane della volatilità di ciascun asset e le simulazioni necessarie per la generazione dei jumps. Alla luce di questi vincoli e del numero di iterazioni inferiore rispetto a quanto auspicato, risulta necessario quantificare la precisione delle stime ottenute.

Metriche statistiche per la valutazione della precisione della stima

Per valutare l'accuratezza delle stime Monte Carlo, si è fatto ricorso a metriche statistiche standard per questo tipo di analisi con l'obiettivo di quantificare sia l'approssimazione della stima al momento dell'emissione sia la sua propagazione nel tempo. In particolare, la precisione della stima al momento dell'emissione del prodotto è stata valutata tramite il prezzo stimato $\hat{P}_0$, il relativo errore standard $SE(\hat{P}_0)$ e il coefficiente di variazione CV^{52} . L'evoluzione di tale dinamica nel tempo è stata analizzata osservando gli intervalli di confidenza IC_t , in termini di valore medio IC_t^{avg} e valore massimo IC_t^{max} , calcolati ai livelli di confidenza del 90% e 95%. Al fine di rendere confrontabili tali stime anche in riferimento a prodotti che si differenziano in termini di valore nominale, i risultati che seguono sono presentati in termini relativi. Le stime presentate in **Tabella 3.8** riportano i risultati dell'analisi in riferimento a cinque certificati in perimetro di analisi che si differenziano per tipologia di struttura, emittente e sottostante ma accomunati da una scadenza non eccedente un anno e mezzo al momento dell'emissione. Il numero di iterazioni condotte N_{sim} è stato aumentato da 200 fino ad un massimo di 5000. Non è stato possibile includere in questo tipo di analisi il certificato *NLBNPIT1UX66*, protagonista del presente capitolo, in quanto i già discussi vincoli computazionali non hanno permesso di oltrepassare la soglia delle circa 500 iterazioni⁵³. In riferimento alla precisione nella stima del prezzo di tale certificato, viene presentato, ove possibile, un confronto con gli altri prodotti inclusi nel perimetro di tale analisi nelle **Figure 3.16** e **3.17**

Tabella 3.8 – Precisione stima Monte Carlo al variare del numero di iterazioni⁵⁴

ISIN / Info	N_{sim}	Stima Emissione			Stima mercato secondario			
		Prezzo	SE %	CV %	$IC_{95} \%$	$IC_{95}^{max} \%$	$IC_{90}^{avg} \%$	$IC_{90}^{max} \%$
DE000SX0MAB3	200	75.76	2.10	29.76	4.13	4.16	3.49	2.91
Emittente: Société Générale	500	76.50	1.32	29.55	2.59	2.66	2.23	1.87
Struttura: Capped Protect Bonus	1000	76.69	0.93	29.30	1.82	1.84	1.55	1.30
Sottostante: Enel	2500	76.85	0.58	28.97	1.14	1.14	0.96	0.81
	5000	76.92	0.41	28.87	0.80	0.82	0.69	0.58
DE000SX66R78	200	10.63	4.19	59.24	8.21	8.58	7.21	6.20
Emittente: Société Générale	500	10.20	2.67	59.66	5.23	5.27	4.42	3.82
Struttura: Discount Certificate	1000	9.85	1.91	60.33	3.74	3.79	3.18	2.77
Sottostante: Iveco	2500	10.20	1.17	58.58	2.30	2.31	1.94	1.71
	5000	10.34	0.82	58.10	1.61	1.63	1.36	1.20
IT0005605545	200	74.66	3.58	50.62	7.02	10.38	8.71	4.09
Emittente: Banca Akros	500	73.26	2.98	66.59	5.84	8.72	7.32	2.84
Struttura: Bonus Certificates con Cap	1000	72.96	2.22	70.19	4.35	5.47	4.59	2.17
Sottostante: Saipem	2500	72.72	1.38	69.01	2.71	3.67	3.08	1.40
	5000	73.52	0.97	68.61	1.90	2.41	2.02	0.97
NLBNPIT294F3	200	92.02	2.82	39.85	5.52	6.20	5.21	3.64
Emittente: BNP Paribas	500	93.71	1.75	39.08	3.43	3.87	3.25	2.20
Struttura: Bonus Cap	1000	93.70	1.24	39.33	2.44	2.86	2.40	1.57
Sottostante: Zalando	2500	95.82	0.77	38.56	1.51	1.74	1.46	0.97
	5000	95.10	0.55	39.11	1.08	1.23	1.03	0.69
NLBNPIT2ECN0	200	92.88	1.89	26.75	3.71	4.04	3.39	2.25
Emittente: BNP Paribas	500	91.52	1.26	28.24	2.48	2.60	2.18	1.48
Struttura: Bonus Cap	1000	91.58	0.91	28.83	1.79	1.83	1.54	1.03
Sottostante: Unicredit	2500	92.04	0.58	28.80	1.13	1.15	0.96	0.67
	5000	92.30	0.41	28.69	0.80	0.81	0.68	0.48

⁵² Il coefficiente di variazione CV è definito come il rapporto tra l'errore standard $SE(\hat{P}_0)$ ed il prezzo stimato $\hat{P}_0$

⁵³ Il certificato NLBNPIT1UX66 è caratterizzato da tre sottostanti e da una durata di 2 anni. Tutti i certificati compresi in questo tipo di analisi, al fine di superare le 1000 iterazioni, sono contraddistinti da un solo sottostante e da una scadenza prossima all'anno.

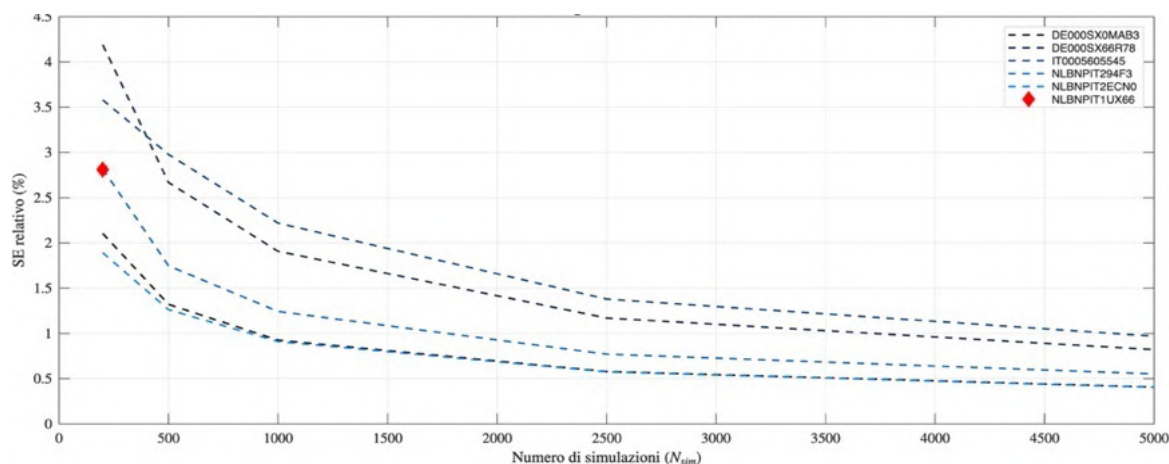
⁵⁴ le colonne IC_{90} e IC_{95} riportano l'ampiezza relativa degli intervalli di confidenza del prezzo stimato nel mercato secondario, costruiti rispettivamente ai livelli di confidenza del 90% e 95%. Per ciascun giorno di valutazione compreso tra la data di emissione e l'ultimo giorno storicamente osservato, l'intervallo di confidenza è calcolato a partire dalla distribuzione Monte Carlo dei prezzi simulati; l'ampiezza dell'intervallo è quindi normalizzata rispetto al prezzo medio stimato al medesimo istante temporale. I valori riportati in tabella rappresentano la media (IC_t^{avg}) e il valore massimo (IC_t^{max}) dell'ampiezza relativa dell'intervallo lungo l'intero orizzonte temporale considerato

I risultati mostrano che, in media, $SE(\hat{p}_0)$ diminuisce dal 2,97 % con 200 simulazioni allo 0,63 % con 5000 iterazioni, corrispondente a una riduzione di circa l'80 % dell'errore di stima. Il rapporto empirico $SE_{200}(\hat{p}_0)/SE_{5000}(\hat{p}_0) = 4,78$ risulta molto vicino al valore teorico $\sqrt{5000/200} = 5^{55}$ (Caflisch, 1998). Tale differenza è coerente con l'importante asimmetria che caratterizza il payoff dei certificati. Sebbene tale analisi sia stata condotta su un campione limitato, appare subito evidente come le stime risultino meno precise all'aumentare dell'incertezza alla base dello strumento in esame. Il caso limite, nel campione in esame, è rappresentato dal certificato *IT0005605545* con sottostante Saipem⁵⁶ la cui convergenza, all'aumentare del numero di iterazioni, appare decisamente più lenta rispetto al valore teorico. Al contrario, i certificati *NLBNPIT2ECN0* e *DE000SX0MAB3* presentano $SE(\hat{p}_0)$ e CV più contenuti, anche per via della struttura più conservativa. Una rappresentazione grafica della relazione empirica tra precisione della stima e incertezza del payoff del certificato, prendendo come esempio il certificato *NLBNPIT1UX66* viene rappresentata nella **Figura A.02** riportata in *Sezione Annex*.

[FIGURA A.02]

Tali differenze si riflettono anche nell'evoluzione degli intervalli di confidenza IC_t^{avg} e IC_t^{max} riportati nella **Figura 3.17**, che, in riferimento al numero di iterazioni considerate nell'analisi empirica ed al livello di confidenza del 95%, risultano mediamente compresi tra il 2 % e il 4 %, con alcuni prodotti caratterizzati da scostamenti potenzialmente superiori a tale intervallo.

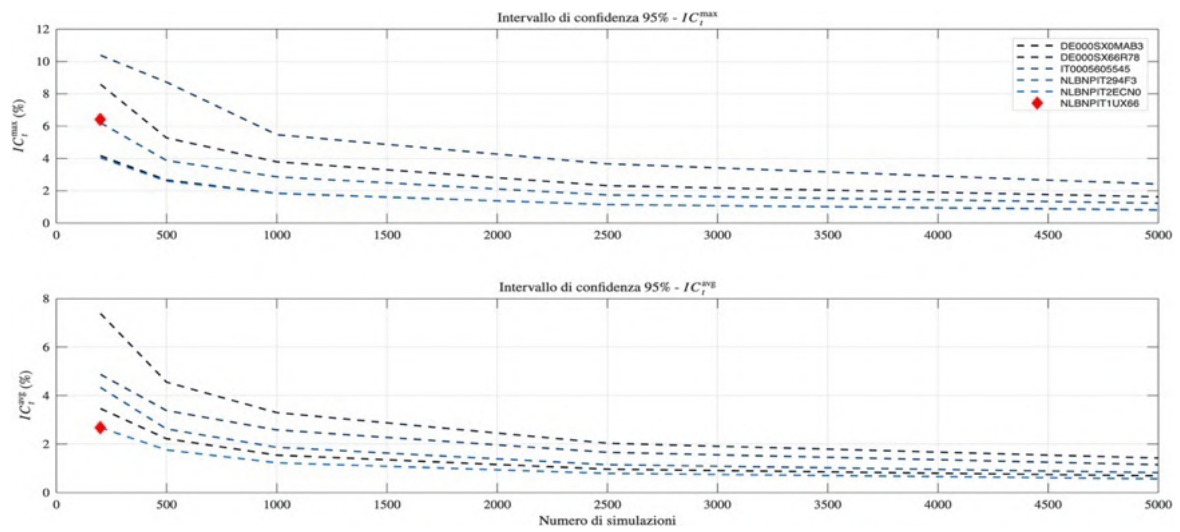
Figura 3.16- *Evoluzione Standard Error (%) all'aumentare del numero di iterazioni*



⁵⁵ La riduzione dell'errore standard con l'aumentare del numero di simulazioni segue la legge teorica della convergenza Monte Carlo, secondo cui l'errore della media stimata decresce proporzionalmente a $N^{-1/2}$, dove N è il numero di iterazioni. Tale comportamento deriva dal fatto che la deviazione standard della media di un campione di dimensione N è data da $SE(\hat{p}_0) = \sigma/\sqrt{N}$, con σ deviazione standard del payoff.

⁵⁶ Il certificato *IT0005605545* si tratta, tra i cinque, del certificato in perimetro caratterizzato dal maggior delta nonché del prodotto che ha subito la maggior contrazione di prezzo (-30%) nel corso della rapida discesa delle quotazioni dei principali indici registrata nel mese di aprile 2025.

Figura 3.17 - Evoluzione dei livelli $IC_{95}^{avg} - IC_{95}^{max}$ all'aumentare del numero di iterazioni



Il confronto presentato nelle **Figure 3.16** e **3.17** evidenzia che il certificate *NLBNPIT1UX66*, pur caratterizzato da un maggiore onere computazionale e da una scadenza più lunga, mostra metriche di precisione comparabili con i certificates del campione di analisi sia in fase di emissione che nelle successive fasi di negoziazione.

Capitolo 4. Analisi empirica del mercato italiano

Dopo aver sviluppato il framework teorico alla base del modello di pricing Monte Carlo e aver illustrato le principali scelte implementative attraverso un'applicazione esemplificativa, il presente capitolo conclusivo si propone di condurre un'analisi empirica del mercato italiano degli investment certificates, indagando sistematicamente l'entità del markup in sede di emissione, la sua evoluzione dinamica lungo il ciclo di vita dello strumento, le determinanti econometriche della variabilità dei markup nonché eventuali relazioni tra tali costi impliciti ed i rendimenti attesi dall'investitore. L'analisi è resa possibile dall'individuazione di un campione eterogeneo di certificati rappresentativo di **1'235 prodotti**, ai quali è stata applicata in modo sistematico la metodologia proposta, generando un totale di **373'144 rilevazioni** quotidiane e consentendo il confronto diretto di tale stima con i prezzi storicamente osservati. Come evidenziato dai dati più recenti, il mercato italiano ha superato il mercato tedesco in termini di volumi negoziati, raggiungendo uno stock di investment certificates in circolazione prossimo agli 85 miliardi di euro a fine 2024. Nonostante la rilevanza di tale fenomeno, la letteratura accademica ha finora dedicato un'attenzione limitata alle specificità del contesto domestico, concentrandosi prevalentemente su mercati quali quello tedesco o svizzero. Per quanto a mia conoscenza, si tratta questa della prima analisi empirica del mercato italiano degli investment certificates basata su un campione di ampiezza paragonabile.

In primo luogo, viene condotta una **analisi del markup in sede di emissione**. Tale componente di costo implicito, rappresentativo della remunerazione per l'attività di strutturazione e hedging condotta dall'intermediario, risulta essere spesso superiore alle commissioni dichiarate nei prospetti informativi (Jørgensen et al., 2011).

Nella seconda parte del capitolo viene analizzata la **dinamica dei markup lungo il ciclo di vita** dei prodotti, con particolare attenzione alla loro evoluzione al progressivo avvicinarsi della scadenza, al fine di valutare l'eventuale presenza di un comportamento coerente con la Life Cycle Hypothesis (Wilkens, Erner e Röder, 2003; Stoimenov e Wilkens, 2005), anche nel mercato italiano degli investment certificates.

In terza battuta, l'indagine si concentra sull'**identificazione delle determinanti** del markup attraverso lo sviluppo di un modello di regressione volto a isolare i fattori economici e di mercato che guidano le politiche di prezzo degli emittenti. Adottando il framework di Baule, 2011, l'analisi testa l'impatto di variabili critiche quali il rischio dello strumento, la rilevanza dei dividendi previsti dai diversi sottostanti, la capitalizzazione degli stessi nonché di altre variabili di controllo rilevanti per la determinazione del markup come la volatilità dei sottostanti, la tipologia di struttura di payoff oltre a considerazioni in merito al rischio di credito dell'emittente. Infine, l'ultima parte dell'analisi esplora la relazione tra l'entità dei costi impliciti e i rendimenti attesi per l'investitore, con l'obiettivo di valutare se un elevato markup possa definirsi predittivo di performance inferiori.

Un obiettivo trasversale dell'analisi consiste nell'identificazione di eventuali **differenze sistematiche tra i dodici emittenti considerati** e tra le diverse strutture di prodotto analizzate. In tale ambito, l'indagine mira a valutare se l'efficienza fiscale intrinseca ai **certificati Maxi Cedola** induca gli emittenti ad applicare markup sistematicamente più elevati rispetto a strutture meno ottimizzate sotto il profilo tributario. In linea con quanto documentato da [Baule, 2011](#)⁵⁷ in merito alla capacità degli intermediari di estrarre valore dai regimi fiscali favorevoli, si esamina se la possibilità di compensare minusvalenze pregresse attraverso premi iniziali elevati consenta di incorporare costi impliciti più onerosi.

4.1. Analisi del Markup all'emissione

La letteratura esistente conferma che, in tutti i principali mercati, gli investment certificates vengono emessi con un markup rispetto al valore teorico calcolato in un mercato *frictionless*. L'entità di tale costo risulta tuttavia molto variabile, a seconda del mercato considerato, della complessità del prodotto e del periodo storico analizzato. Negli Stati Uniti, [Henderson e Pearson, 2011](#) osservano un markup medio dell'8% su un campione di SPARQS emessi da Morgan Stanley. Studi più datati, riferiti a prodotti con sottostanti indici, evidenziano invece commissioni lorde comprese tra il 2,5% e il 4% del prezzo di emissione sul mercato primario ([Baubonis et al., 1993](#)).

Nel mercato tedesco, [Stoimenov e Wilkens, 2005](#) evidenziano come i prodotti con sottostanti azionari mostrano un markup medio di 3,89% significativamente più elevato rispetto al 2,13% dei prodotti con sottostanti legati all'indice DAX, evidenziando inoltre l'effetto della complessità del payoff sul prezzo. [Wilkens, Erner e Röder, 2003](#) documentano valori differenziati per tipologia di strumento, con markup del 3,04% per i reverse convertibles e del 4,20% per i discount certificates. Un'analisi di lungo periodo condotta da [Entrop et al., 2016](#) evidenzia infine una marcata variabilità dei margini in relazione alle condizioni di mercato, con valori scesi fino allo 0,58% prima della crisi finanziaria del 2008 e successivamente risaliti all'1,24%. Con riferimento ad un campione di 275 prodotti negoziati nel mercato svizzero, [Burth, Kraus e Wohlwend, 2001](#) rilevano un markup medio pari all'1,91%, osservando inoltre che i prodotti con cedola fissa presentano un costo implicito più elevato (3,22%) rispetto a quelli privi di cedola (1,40%), suggerendo possibili relazioni tra la struttura dei flussi di pagamento ed il costo implicito del prodotto. Nei mercati nord-europei, il markup medio stimato si colloca intorno al 6%. [Szymanowska, Ter Horst e Veld, 2009](#) documentano tale entità per i reverse convertibles olandesi, mentre [Jørgensen et al., 2011](#) riportano risultati analoghi per i certificati a capitale protetto collocati in Danimarca.

⁵⁷ Nel mercato tedesco, fino al 2009 le plusvalenze erano esenti se lo strumento era detenuto oltre 12 mesi. Baule, 2011 documenta come gli emittenti anticipassero tale effetto fiscale con markup più elevati sui prodotti in prossimità di tale scadenza. In Italia, i certificati classificati come "redditi diversi" (art. 67 TUIR) consentono la compensazione di minusvalenze pregresse, sfruttata dalle strutture Maxi Cedola tramite premi elevati e pressoché certi dopo l'emissione.

Il Mercato italiano

In riferimento al mercato italiano, l'analisi condotta su un campione di 1235 certificati, evidenzia un markup medio all'emissione pari al 6,02%⁵⁸. Tale dato si colloca su valori del tutto in linea rispetto a quanto riscontrato nei mercati nord-europei (Szymanowska, Ter Horst e Veld, 2009; Jørgensen et al., 2011) ma evidenzia dei markup decisamente superiori rispetto a quanto riscontrato nel mercato tedesco nei primi anni 2000 (Stoimenov e Wilkens, 2005; Wilkens, Erner e Röder, 2003).

I dati riportati nella **Tabella 4.1**, evidenziano una marcata eterogeneità nei livelli di markup tra gli emittenti attivi nel mercato italiano. In particolare, alcuni operatori, quali Vontobel, Natixis e BNP Paribas, registrano valori medi significativamente superiori alla media complessiva, mentre altri emittenti, come Intesa Sanpaolo e Mediobanca evidenziano markup notevolmente più contenuti, talvolta anche negativi⁵⁹. Considerata la presenza di potenziali outlier nella distribuzione dei markup, oltre al valore medio, viene inoltre riportato il valore mediano al fine di fornire una misura più robusta.

Tabella 4.1 – Markup e markup annualizzato (%) medio/mediano all'emissione per emittente

Emittente	N. Certificati	Markup		Markup Ann.		Anni a scadenza	Rischio
		Media	(Mediana)	Media	(Mediana)	Media	Media
Banca Akros	84	2.55	(2.09)	1.94	(0.89)	3.16	2.79
BNP Paribas	140	7.61	(7.55)	4.31	(2.98)	2.37	4.69
Citigroup	18	5.17	(3.39)	1.25	(0.83)	4.53	4.78
Goldman Sachs	79	3.41	(2.39)	1.17	(0.81)	3.01	3.65
Intesa Sanpaolo	51	0.07	(-0.11)	0.08	(-0.04)	4.29	2.76
Leontieq	52	6.85	(6.60)	2.55	(1.98)	3.55	4.15
Marex	95	6.94	(6.06)	4.02	(1.77)	3.00	4.26
Mediobanca	74	1.83	(1.43)	0.78	(0.46)	3.18	3.70
Natixis	33	7.37	(6.50)	3.90	(1.90)	2.74	4.58
Société Générale	266	5.36	(5.39)	3.17	(3.11)	1.75	3.88
Unicredit	232	6.83	(6.26)	4.67	(3.79)	1.70	3.99
Vontobel	125	11.77	(11.19)	5.58	(4.85)	2.52	5.29
Totale (Media)	1249	6.02	(5.58)	3.37	(2.59)	2.49	4.06

Fonte: Elaborazione propria, per “anni a scadenza” set informativi dei prodotti in perimetro reperibile nei siti ufficiali degli emittenti considerati.

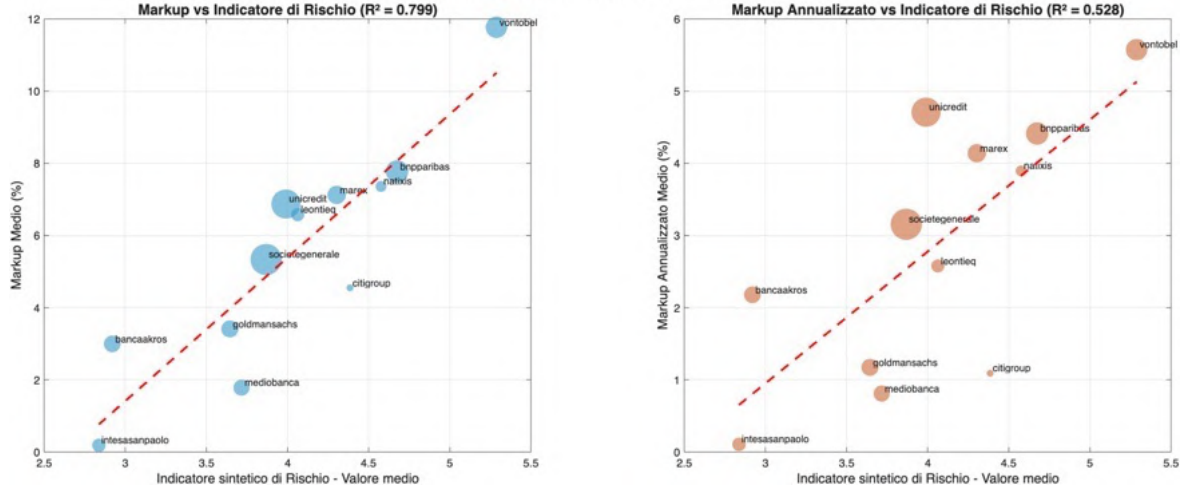
L'eterogeneità dei markup osservati tra i diversi emittenti in perimetro d'analisi a valle di questa indagine preliminare non deve essere interpretata esclusivamente come una divergenza nelle politiche commerciali e di pricing, ma va ricondotta in larga misura anche alle caratteristiche intrinseche dei prodotti collocati. In primo luogo, risulta utile osservare come i diversi emittenti tendano a collocare prodotti caratterizzati da un diverso profilo di rischio. In particolare, come evidenziato nella **Tabella 2.1**, presentata nel secondo capitolo, Intesa Sanpaolo si caratterizza per via di un'ampia proposta di prodotti a capitale protetto rappresentativi del 59% del totale dei prodotti in perimetro emessi da tale emittente. Al contrario, Vontobel si caratterizza per emettere esclusivamente prodotti a capitale

⁵⁸ Il markup mediano all'emissione si attesta invece ad un valore pari a 5,58% evidenziando un'asimmetria positiva nella distribuzione di tali costi impliciti dovuta alla presenza di prodotti per cui si stima un elevato valore di markup.

⁵⁹ Si ricorda che nel corso dell'analisi non è stato preso in considerazione il rischio di credito dell'emittente il quale viene assunto default-free. Anche in riferimento al lavoro di Stoimenov, Wilkens, 2005 si rilevano stime di markup negative in riferimento ad alcune strutture (anche in quel caso a capitale protetto).

condizionatamente protetto contraddistinti, inoltre, dall'inclusione di più sottostanti per ciascuno dei certificati in perimetro. Tali differenze si traducono in livelli differenti della misura sintetica di rischio $\mathcal{R}_t$ osservata al momento dell'emissione. Tale elemento necessita di essere preso in considerazione al fine di valutare in maniera più completa le differenti politiche di pricing degli emittenti come evidenziato dalla **Figura 4.1**⁶⁰.

Figura 4.1 – Relazione tra misura sintetica di rischio $\mathcal{R}_t$ e Markup/Markup Annualizzato all'emissione – Valori medi per emittente⁶¹



Al fine di isolare progressivamente le diverse componenti che concorrono alla determinazione del markup dei certificati, l'analisi si basa su tre specificazioni funzionali via via più ricche. Tale approccio, applicato sia al markup sia al markup annualizzato, si pone l'obiettivo di controllare il grado di eterogeneità associato al rischio dei prodotti, la presenza di indici azionari tra i sottostanti oltre alla struttura di payoff del prodotto stesso.

La **prima specificazione** considera esclusivamente effetti fissi legati all'emittente. Il modello può essere definito come:

$$\Pi_t / \Pi_t^{\text{Ann}} = \alpha + \sum_{j=1}^{J-1} \delta_j \mathbb{1}_{\{\text{Emittente}_t=j\}} + \varepsilon_t \quad (\text{R.1})$$

dove i coefficienti δ_j quantificano il differenziale medio di markup dell'emittente j rispetto all'intermediario di riferimento, assunto come baseline di confronto e individuato nell'istituto il cui markup medio stimato risulta più prossimo alla mediana della distribuzione dei markup medi stimati tra gli intermediari. Per ciascuna delle tre specificazioni, viene individuata una baseline specifica. L'intercetta

⁶⁰ La Figura 4.1 riporta, per ciascun emittente, il markup Π_t medio e il markup annualizzato Π_t^{Ann} medio in funzione del livello medio della misura sintetica di rischio $\mathcal{R}_t$. La dimensione di ciascun punto è proporzionale al numero di prodotti in perimetro per ciascun emittente. Le rette di regressione (in rosso) rappresentano la relazione lineare stimata tramite OLS tra rischio medio e markup medio a livello di emittente $\Pi_t = \beta_0 + \beta_1 \mathcal{R}_t + \varepsilon_t$, $\Pi_t^{\text{Ann}} = \beta_0^{\text{Ann}} + \beta_1^{\text{Ann}} \mathcal{R}_t + \varepsilon_t^{\text{Ann}}$. I coefficienti di pendenza β_1 e β_1^{Ann} risultano positivi e statisticamente significativi all'1%. I coefficienti di determinazione R^2 risultano rispettivamente pari a 0,799 e 0,528.

⁶¹ La dimensione delle "bolle" rappresenta il numero di certificati in perimetro emessi dall'emittente.

α rappresenta il markup medio atteso per un certificato emesso dall'intermediario individuato come baseline.

Nella **seconda specificazione** viene introdotto un controllo per il rischio del prodotto, centrato rispetto alla media campionaria $\bar{R}$ nonché una variabile dummy Index_i finalizzata a identificare i prodotti aventi come sottostante un indice azionario. Il modello, per questo, viene descritto come:

$$\Pi_i / \Pi_i^{\text{Ann}} = \alpha + \sum_{j=1}^{J-1} \delta_j \mathbb{1}_{\{\text{Emittente}_i=j\}} + \beta (R_i - \bar{R}) + \theta \text{Index}_i + \varepsilon_i \quad (\text{R.2})$$

L'inclusione del rischio consente di perseguire l'obiettivo precedentemente dichiarato distinguendo tra markup più elevati dovuti a una maggiore rischiosità intrinseca dei prodotti e markup riconducibili a politiche di pricing più aggressive dell'emittente. La variabile dummy Index_i si presta invece a catturare eventuali differenze sistematiche nei markup tra prodotti aventi come sottostante un indice azionario e quelli basati su singoli titoli.

La **terza specificazione**, ponendosi lo scopo di rilevare eventuali differenze nel markup dovuti al grado di protezione del capitale a scadenza e ad ulteriori caratteristiche dei sottostanti in esame, introduce ulteriori effetti fissi relativi alla struttura di payoff del certificato in linea con le specifiche presentate nella **Tabella 2.1**⁶² ed alla volatilità dei sottostanti rappresentati nel certificato. Quest'ultima specificazione può per questo essere descritta come:

$$\Pi_i / \Pi_i^{\text{Ann}} = \alpha + \sum_{j=1}^{J-1} \delta_j \mathbb{1}_{\{\text{Emittente}_i=j\}} + \beta (R_i - \bar{R}) + \theta \text{Index}_i + \lambda_1 \text{Vola_h}_i + \lambda_2 \text{Vola_l}_i + \sum_{k=1}^{K-1} \gamma_k \mathbb{1}_{\{\text{Struttura Payoff}_i=k\}} + \varepsilon_i$$

Ponendosi lo scopo di rilevare eventuali differenze nel markup dovuti al grado di protezione del capitale a scadenza. A tale fine, dalla macrocategoria dei prodotti a capitale condizionatamente protetto sono stati scorporati i certificati di tipo Cash Collect, al fine di costituire una categoria di analisi distinta rappresentativa della tipologia di prodotto più comune nel mercato italiano. Inoltre, tale categoria di prodotto rappresenta la base ideale per un confronto con gli strumenti “Maxi Cedola” per via del fatto che tali prodotti risultano accomunati dalla stessa struttura di payoff a scadenza. Anche per questo, il markup dei prodotti Cash Collect sono stati considerati come baseline per il confronto con le altre strutture. La variabile dummy Vola_h_i assume valore pari ad uno nel caso in cui la volatilità media dei sottostanti inclusi nel certificato abbia registrato storicamente valori medi superiori al 40% su base annua. Analogamente, la variabile Vola_l_i identifica i certificati caratterizzati da sottostanti a bassa volatilità, assumendo valore pari a uno nel caso in cui la volatilità media storica dei sottostanti risulti inferiore al 25%, e zero negli altri casi.

Anche per via della presenza di outlier, allo stimatore OLS è stata preferita la stima robusta basata sul metodo Iteratively Reweighted Least Squares (IRLS)⁶³ con l'obiettivo di ridurre l'impatto di tali

⁶² I prodotti riportati in Tabella 2.1 come “Altro” (Twin Win certificates, certificati Reverse, certificati “Shark fin”) sono stati qui aggregati nella categoria dei prodotti a capitale condizionatamente protetto.

⁶³ Mediante il metodo IRLS, vengono assegnati dei pesi alle osservazioni in base alla distanza dei residui, attenuando l'influenza degli outlier sul risultato finale. Al fine di determinare i pesi, si è fatto ricorso alla funzione di ponderazione bisquare di Tukey (Beaton, Tukey, 1974).

rilevazioni. Gli standard error sono calcolati con il metodo di White e prendono in considerazione anche la struttura di pesatura iterativa indotta dallo stimatore IRLS. La **Tabella 4.2** presenta i risultati delle stime IRLS per le tre specificazioni considerate sia in riferimento alla stima del markup medio per emittente così come del markup medio annualizzato.

Tabella 4.2 - Stime IRLS specificazioni 1-2-3, Standard error di White robusti all'eteroschedasticità

	Specificazione 1		Specificazione 2		Specificazione 3	
	(1) Π	(2) Π^{Ann}	(3) Π	(4) Π^{Ann}	(5) Π	(6) Π^{Ann}
α (Intercepta)	5.345*** (0.248)	3.109*** (0.135)	5.776*** (0.249)	1.942*** (0.165)	4.849*** (0.423)	2.088*** (0.208)
Effetti Fissi Emittente (δ_j)						
BANCA AKROS	-3.798*** (0.506)	-2.372*** (0.276)	-1.023** (0.421)	-0.097 (0.278)	-0.131 (0.508)	-0.089 (0.294)
BNP PARIBAS	2.064*** (0.423)	-0.145 (0.230)	baseline	baseline	0.458 (0.468)	baseline
CITIGROUP	-2.154** (1.012)	-1.941*** (0.551)	-3.355*** (0.742)	-1.115** (0.491)	-2.644*** (0.793)	-1.711*** (0.496)
GOLDMAN SACHS	-1.752*** (0.544)	-1.841*** (0.296)	-1.414*** (0.428)	-0.453 (0.283)	-0.591 (0.535)	-0.670** (0.309)
INTESA SANPAOLO	-5.278*** (0.619)	-3.026*** (0.337)	-2.651*** (0.498)	-0.829** (0.330)	-1.794*** (0.577)	-0.939*** (0.361)
LEONTEQ	0.914 (0.614)	-1.091*** (0.334)	0.146 (0.470)	0.021 (0.311)	baseline	-0.829*** (0.320)
MAREX	-0.255 (0.486)	-1.536*** (0.264)	-0.999*** (0.386)	-0.343 (0.255)	-0.038 (0.489)	-0.356 (0.269)
MEDIOBANCA	-3.976*** (0.535)	-2.386*** (0.291)	-3.284*** (0.423)	-1.024*** (0.280)	-1.926*** (0.529)	-0.814*** (0.310)
NATIXIS	1.095 (0.747)	-1.003** (0.406)	-0.573 (0.558)	-0.219 (0.369)	0.379 (0.631)	-0.183 (0.381)
SOCIÉTÉ GÉNÉRALE	baseline	baseline	0.006 (0.308)	1.260*** (0.204)	-0.441 (0.479)	-0.421* (0.234)
UNICREDIT	0.950*** (0.364)	0.791*** (0.198)	0.862*** (0.313)	1.987*** (0.207)	1.102** (0.443)	1.410*** (0.212)
VONTOBEL	5.388*** (0.440)	1.456*** (0.239)	2.222*** (0.358)	1.735*** (0.237)	2.807*** (0.476)	1.569*** (0.249)
Caratteristiche Prodotto - Sottostante/i						
β (Risk, %)	—	—	2.163*** (0.077)	0.706*** (0.051)	2.110*** (0.089)	0.659*** (0.061)
θ (Indice, 0 - 1)	—	—	-0.521 (0.354)	-0.229 (0.234)	-0.502 (0.410)	-0.409 (0.281)
λ_1 (Vola_Alta, 0 - 1)	—	—	—	—	1.782*** (0.237)	1.448*** (0.162)
λ_2 (Vola_Bassa, 0 - 1)	—	—	—	—	-0.814*** (0.237)	-0.599*** (0.162)
Struttura Payoff (γ_k)						
Cash Collect	—	—	—	—	baseline	baseline
Airbag	—	—	—	—	-2.181*** (0.405)	-1.542*** (0.277)
Cap. Cond. Protetto	—	—	—	—	1.551*** (0.287)	1.662*** (0.196)
Capitale Protetto	—	—	—	—	0.882** (0.446)	0.628** (0.305)
Maxi Cedola	—	—	—	—	0.588** (0.298)	-0.450** (0.204)
N.Prodotti considerati	1235	1235	1235	1235	1235	1235
Peso medio IRLS	89.0%	86.4%	87.5%	83.7%	88.7%	85.5%
R ² (Adjusted)	0.343	0.335	0.694	0.557	0.729	0.661

La prima specificazione, che include esclusivamente gli effetti fissi legati all'emittente, mostra differenze di markup rispetto alla baseline ampie e significative per la maggior parte degli intermediari considerati. In particolare, Vontobel e, in misura minore, Unicredit, presentano markup medi significativamente più elevati rispetto a Société Générale individuato intermediario di riferimento. Al contrario, altri emittenti come Intesa Sanpaolo, Mediobanca e Citigroup, risultano distinguersi per via di markup sistematicamente inferiori.

L'introduzione dei controlli per il rischio del prodotto e per la presenza di un indice azionario tra i sottostanti, nella seconda specificazione, comporta un netto miglioramento della capacità esplicativa del modello. Il coefficiente associato alla misura sintetica di rischio risulta positivo e altamente significativo

($p < 0.001$) sia per il markup così come per il markup annualizzato, confermando l'ipotesi secondo cui prodotti più rischiosi incorporano, in media, un markup più elevato all'emissione.

Risulta inoltre interessante osservare come, successivamente al controllo per il rischio, alcuni differenziali di emittente si riducano in valore assoluto o perdano significatività, confermando le intuizioni esposte in precedenza. Per quanto riguarda la variabile dummy relativa alla presenza di un indice azionario tra i sottostanti si evidenzia un coefficiente stabilmente negativo. Seppur non significativa, il segno di tale stima appare tuttavia coerente con le evidenze della letteratura, che documentano come i certificati con sottostanti indici azionari presentino premi impliciti mediamente più contenuti rispetto a quelli basati su singoli titoli azionari (Stoimenov e Wilkens, 2005; Baule, 2011). Tale evidenza viene ricondotta dagli autori a una maggiore efficienza delle strategie di copertura, adottate da emittenti e market maker, favorite dai più elevati volumi di scambio e dalla maggiore liquidità dei derivati di riferimento. La terza specificazione, infine, consente di analizzare in modo più approfondito il ruolo della struttura di payoff nonché il contributo apportato dalla volatilità strutturale dei sottostanti rappresentativi degli strumenti in analisi. Per quanto riguarda la struttura dei certificati, risulta sorprendente osservare come i certificati “Airbag”, caratterizzati da un payoff più conservativo rispetto ai certificati Cash Collect considerati come struttura di riferimento, presentino markup significativamente inferiori rispetto a tutte le altre strutture. Al contrario, i prodotti a capitale protetto mostrano un markup all'emissione superiore di circa 1,5 punti percentuali rispetto alla struttura di riferimento. Costi impliciti maggiori si rilevano inoltre nei prodotti a capitale condizionatamente protetto⁶⁴ (escludendo i Cash Collect, considerati in categoria a sé stante) e nei prodotti più conservativi a capitale protetto ($p < 0,05$). Tale evidenza risulta coerente con quanto riportato da Giovanna Zanotti, 2024 nella sua analisi dei KID di 1702 emessi nel biennio 2021-2022. In tale ricerca, l'autrice evidenzia come il comparto dei prodotti a capitale condizionatamente protetto, anche sulla base dei set documentali pubblicati dagli stessi emittenti, sia caratterizzato dai più elevati costi iniziali.

Particolarmente interessante risulta l'analisi dei prodotti “Maxi Cedola”, per i quali il markup all'emissione risulta positivo, mentre il markup annualizzato risulta negativo (entrambi con $p < 0,05$). Tale dinamica può essere spiegata dalla maggiore durata all'emissione tipica di questa categoria di prodotti. Si rimanda ai paragrafi successivi per una discussione più completa di questa particolare tipologia di prodotto. Indicazioni particolarmente significative sono inoltre riscontrabili dalle stime degli effetti fissi legati alla volatilità degli asset inclusi come sottostante. Risulta infatti particolarmente evidente come i prodotti con sottostanti ad alta volatilità siano contraddistinti da un markup di oltre 1,5 punti percentuali superiore rispetto ai prodotti con sottostanti caratterizzati da volatilità “standard”. Al contrario, i prodotti con sottostanti meno volatili risultano essere caratterizzati da un markup significativamente inferiore. Tale evidenza, trova un riscontro molto forte anche nella letteratura esistente che identifica la volatilità come uno dei principali determinanti dei costi impliciti nei prodotti strutturati. Entrop et al., 2016 e Henderson e Pearson, 2011 documentano una relazione positiva e

⁶⁴ Si fa riferimento all'insieme di prodotti “Bonus Cap”, “Barrier discount” e “Discount certificates”

statisticamente significativa tra volatilità implicita e premio all'emissione, mentre [Entrop e Fischer, 2020](#) mostrano come l'incertezza associata ai sottostanti venga sistematicamente trasferita agli investitori retail sotto forma di markup più elevati. Come evidenziato in [Baule, 2011](#), tale evidenza può essere in gran parte spiegata dai maggiori costi di copertura sostenuti dall'emittente in quanto, in presenza di elevata volatilità, la replica del payoff risulta più onerosa e soggetta a maggior rischio di copertura. Una ulteriore interpretazione è riconducibile alla teoria dello shrouding proposta da [Gabaix e Laibson, 2006](#), secondo cui la minore trasparenza informativa, tipicamente associata a sottostanti più volatili, facilita l'occultamento dei costi impliciti, consentendo l'applicazione di markup più elevati.

A valle di questa analisi, risulta possibile commentare in maniera più consapevole le differenze nei costi impliciti medi dei prodotti degli emittenti oggetto dell'analisi rispetto ai valori grezzi precedentemente presentati.

Tabella 4.3- *Stime IRLS markup e markup annualizzato medio all'emissione – Specificazione 3*

Emittente	Markup			Markup Annualizzato		
	Valore (%)	Diff. Base (%)	SE (Diff.)	Valore (%)	Diff. Base (%)	SE (Diff.)
VONTOBEL	7.752	+2.904	(0.476)***	3.912	+1.825	(0.249)***
MAREX	5.963	+1.114	(0.489)**	3.514	+1.426	(0.269)***
NATIXIS	5.856	+1.007	(0.631)	3.410	+1.322	(0.381)***
UNICREDIT	5.819	+0.970	(0.443)**	3.281	+1.193	(0.212)***
BANCA AKROS	5.489	+0.640	(0.508)	3.239	+1.152	(0.294)***
BNP PARIBAS	4.908	+0.060	(0.468)	2.088		<i>baseline</i>
LEONTEQ	4.849		<i>baseline</i>	1.171	-0.917	(0.320)***
GOLDMAN SACHS	4.262	-0.587	(0.535)	1.406	-0.681	(0.309)**
SOCIÉTÉ GÉNÉRALE	4.106	-0.743	(0.479)	0.511	-1.576	(0.234)***
INTESA SANPAOLO	3.265	-1.584	(0.577)***	1.631	-0.456	(0.361)
MEDIOBANCA	3.031	-1.818	(0.529)***	1.585	-0.503	(0.310)
CITIGROUP	2.464	-2.385	(0.793)***	-0.554	-2.642	(0.496)***

I risultati delle stime evidenziano una marcata eterogeneità nei markup tra emittenti, anche dopo aver controllato per rischio, struttura di payoff e volatilità dei sottostanti. Vontobel si conferma l'emittente contraddistinto dal maggiore markup all'emissione (7,752%), che risulta essere di ben 2,9 punti percentuali superiori rispetto alla baseline ($p < 0,01$). All'estremo opposto, si colloca Citigroup le cui stime segnalano un markup all'emissione pari al 2,464%. La dispersione tra il primo e l'ultimo emittente, superiore ai 5 punti percentuali, conferma la presenza di differenze sostanziali nelle politiche di pricing. Costi impliciti significativamente superiori ($p < 0,05$) alla media sono inoltre riscontrabili per Unicredit e Marex mentre si riscontrano emissioni particolarmente competitive anche nei prodotti collocati da Banca Intesa e da Mediobanca. Osservando i markup nella loro forma annualizzata, anche i prodotti emessi da Société Générale (principalmente rappresentati da “discount certificates”) e da Leonteq emergono caratterizzati da costi impliciti significativamente inferiori ($p < 0,01$) rispetto a quelli emessi da BNP Paribas che in tale frangente rappresenta l'emittente di riferimento secondo la metodologia presentata.

4.2. Analisi del Markup lungo il ciclo di vita del prodotto

Dopo aver discusso le principali differenze nelle politiche di pricing adottate dagli emittenti in fase di emissione, risulta ora opportuno analizzare come tali costi impliciti evolvano quando il prodotto viene negoziato sul mercato secondario. La letteratura accademica concorda ampiamente sul fatto che il markup degli strumenti strutturati non rimanga costante, ma tenda a ridursi sistematicamente man mano che il prodotto si avvicina alla scadenza (Stoimenov e Wilkens, 2005; Baule, 2011, Szymanowska et al., 2009; Henderson e Pearson, 2011; Entrop et al., 2013⁶⁵). La rapidità di tale fenomeno, identificato come Life Cycle hypothesis, non risulta però comune in tutte le ricerche condotte nei differenti mercati. Le evidenze empiriche mostrano dinamiche di decadimento del markup differenti a seconda del mercato e della struttura del prodotto. Negli Stati Uniti, Henderson e Pearson, 2011 evidenziano come il premio iniziale si riduca in modo particolarmente rapido, passando da livelli elevati a valori prossimi all'1% nel giro di pochi mesi di negoziazione. In riferimento al mercato tedesco, Stoimenov e Wilkens, 2005 mostrano invece come la velocità di convergenza dipenda dalla tipologia di sottostante⁶⁶. Per i certificati su indici azionari il markup si annulla rapidamente, mentre per quelli scritti su singole azioni la riduzione risulta molto più lenta e può condurre al passaggio da un premio iniziale a uno sconto solo nelle fasi finali della vita del prodotto.

Il Mercato italiano

Al fine di verificare se le differenze nelle politiche di pricing tra emittenti rilevate in fase di emissione persistono anche durante l'intero ciclo di vita dei prodotti l'analisi presentata in precedenza viene estesa mediante l'adozione di un modello a dati panel. Con questo obiettivo, in coerenza con Wilkens, Erner e Röder, 2003; Stoimenov e Wilkens, 2005; Baule, 2011 si introduce il coefficiente di vita residua relativa *Lifetime* definito come:

$$Lifetime_{k,t} = \frac{t_k - t_{k0}}{t_K - t_{k0}} \quad (119)$$

Tale metrica assume valore nullo al momento dell'emissione t_{k0} , per poi crescere linearmente verso l'unità con l'approssimarsi della scadenza t_K . Sulla base di questo coefficiente il periodo compreso tra l'emissione e la scadenza di ciascun prodotto viene suddiviso in dieci finestre temporali W disgiunte di pari durata e, per ognuna di esse, viene stimata la specificazione più completa (comprendente il controllo congiunto degli effetti fissi legati alla rischiosità dello strumento, il controllo legato alla presenza di indici azionari tra i sottostanti, della struttura di payoff del certificato nonché della volatilità dei sottostanti compresi nel prodotto in esame) presentata in riferimento all'analisi del markup all'emissione.

⁶⁵ Entrop et al. (2013) mostrano che la *Life Cycle Hypothesis* risulta valida anche per i *Leverage Certificates*. In questo caso si evidenzia come il decadimento dei margini sia più marcato per i certificati caratterizzati da barriere relativamente distanti (e quindi da una minore probabilità di knock-out) in quanto tali strumenti tendono a essere detenuti dagli investitori per orizzonti temporali più lunghi.

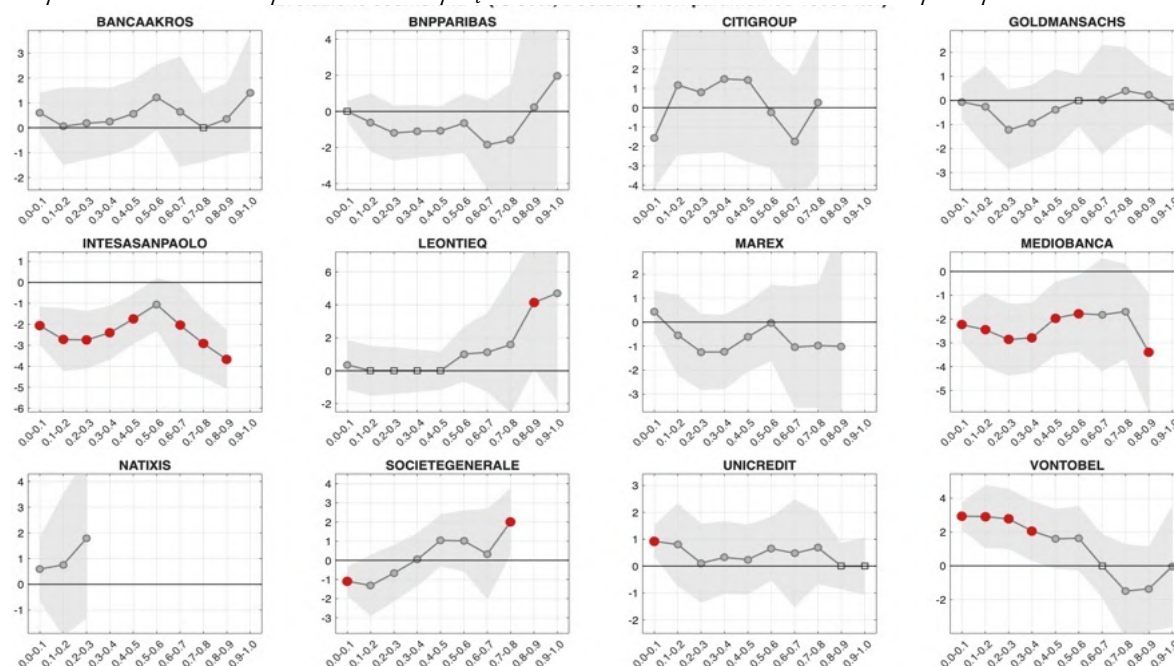
⁶⁶ In questa pubblicazione evidenzia come la velocità di convergenza del markup al fair value dipenda criticamente dalla natura del sottostante: i prodotti su singoli titoli azionari mostrano una persistenza dei costi impliciti significativamente maggiore rispetto a quanto rilevato in riferimento i prodotti con sottostante l'indice tedesco DAX.

$$\Pi_{i,w} / \Pi_{i,w}^{\text{Ann}} = \alpha_w + \sum_{j=1}^{J-1} \delta_{j,w} \mathbb{1}_{\{\text{Emit}_i=j\}} + \beta_w (R_i - \bar{R}_w) + \theta_w \text{Index}_i + \lambda_1 \text{Vola_h}_i + \lambda_2 \text{Vola_l}_i + \sum_{k=1}^{K-1} \gamma_{k,w} \mathbb{1}_{\{\text{Str. Payoff}_i=k\}} + \varepsilon_{i,w}$$

Per ciascun prodotto, le stime del markup Π_t e del markup annualizzato Π_t^{Ann} vengono aggregate all'interno di ciascuna finestra temporale w mediante media campionaria al fine di ottenere una singola misura rappresentativa del costo implicito dello strumento per ciascun periodo di analisi w individuato. Seguendo le stesse modalità proposte nell'analisi del markup in sede di emissione, l'emittente "baseline" viene individuato separatamente per ciascuna finestra.

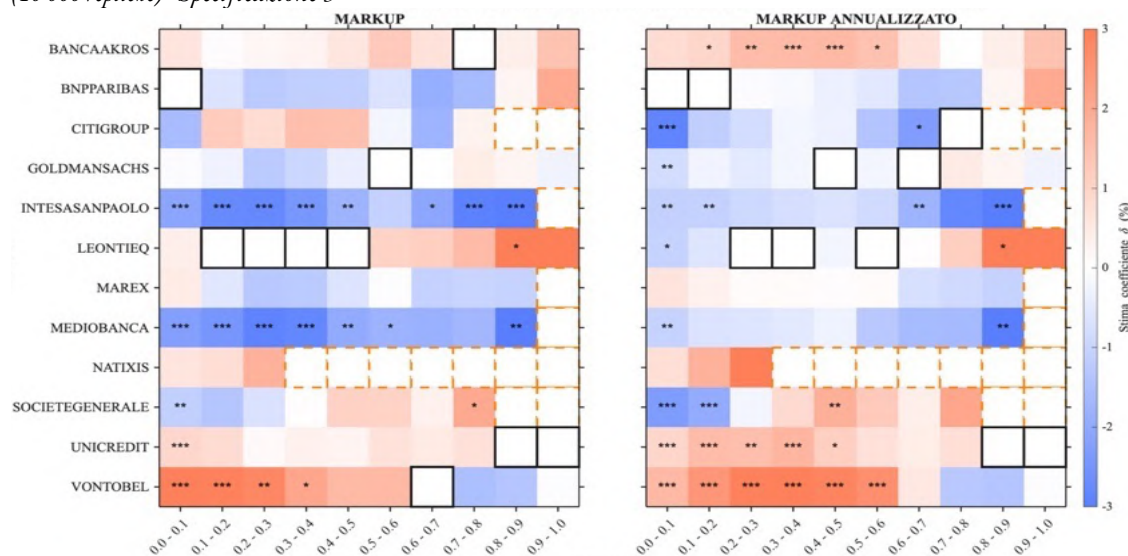
Con l'avvicinarsi della scadenza, il numero di certificati disponibili si riduce progressivamente. Tale dinamica riflette sia l'uscita anticipata dal campione dei prodotti rimborsati per effetto di eventi di Autocall, sia il fatto che l'analisi è condotta in riferimento ad un perimetro di prodotti negoziati nella giornata di giovedì 19 giugno 2025. Da questo ne deriva che non tutti i prodotti risultano osservabili in prossimità della scadenza naturale. Al fine di garantire adeguata robustezza statistica delle stime, gli emittenti per i quali risultano disponibili meno di otto prodotti all'interno della finestra temporale w sono esclusi dalla stima relativa a tale finestra. Al fine di ottenere un'inferenza affidabile in presenza di campioni di dimensioni ridotte e senza imporre assunzioni parametriche sulla distribuzione degli errori, gli errori standard sono stimati mediante bootstrap non-parametrico eseguito con 10'000 repliche, ricampionando le osservazioni con replacement e ri-stimando il modello a ogni iterazione. Gli errori standard bootstrap vengono per questo calcolati come deviazione standard delle stime dei coefficienti. Nella **Figura 4.2** si riportano le stime dei coefficienti δ rappresentativi dell'evoluzione degli scostamenti di markup di ciascun emittente rispetto al benchmark lungo l'intero ciclo di vita dei prodotti con lo scopo di osservare se le differenze nei costi impliciti rilevati in sede di emissione vengono confermate anche nelle fasi in cui il prodotto viene negoziato nel mercato secondario. Nello specifico, si rileva come i maggiori costi impliciti rilevati in sede di emissione nel caso dei prodotti emessi da Vontobel tendano a persistere nella prima metà del ciclo di vita degli stessi. Sebbene meno rilevante in termini di entità, una dinamica simile è riscontrabile anche per i certificati emessi da Unicredit, in modo particolare dall'osservazione dell'evoluzione del markup nella forma annualizzata presentata nel secondo pannello della **Figura 4.3**. Per quanto riguarda i certificati caratterizzati da costi impliciti più contenuti, l'evidenza osservata in sede di emissione per Intesa Sanpaolo e Mediobanca si conferma in modo piuttosto netto anche nelle rilevazioni sul mercato secondario, dove i prodotti emessi da tali emittenti risultano mediamente caratterizzati da un markup inferiore di circa il 2% rispetto alla media degli altri emittenti attivi nel mercato italiano. Al contrario, per i certificati emessi da Citigroup, non è possibile trarre la medesima conclusione poiché le stime dei costi impliciti non risultano statisticamente significative lungo l'intero ciclo di vita dei prodotti, a causa della numerosità piuttosto ridotta dei certificati di tale emittente inclusi nel perimetro d'analisi. Interessante risulta la dinamica dei certificati di Société Générale, per i quali i costi impliciti risultano inferiori alla media degli altri emittenti all'emissione e nelle primissime fasi del ciclo di vita, per poi risultare significativamente superiori ($p < 0,1$) nelle fasi successive.

Figura 4.2 – Evoluzione dei coefficienti δ : differenza di markup rispetto all'emittente baseline lungo il ciclo di vita del prodotto – variabile dipendente Markup Π_i – Standard error stimati mediante bootstrap non parametrico⁶⁷



Una rappresentazione più immediata della stima e della significatività statistica di tali coefficienti viene inoltre presentata nella **Figura 4.3** in cui viene offerta una lettura sintetica delle dinamiche competitive attraverso la rappresentazione heatmap dei coefficienti δ stimati per il markup (gli stessi riportati in **Figura 4.2**) e il markup annualizzato consentendo di cogliere in modo più immediato la persistenza degli scostamenti lungo il ciclo di vita.

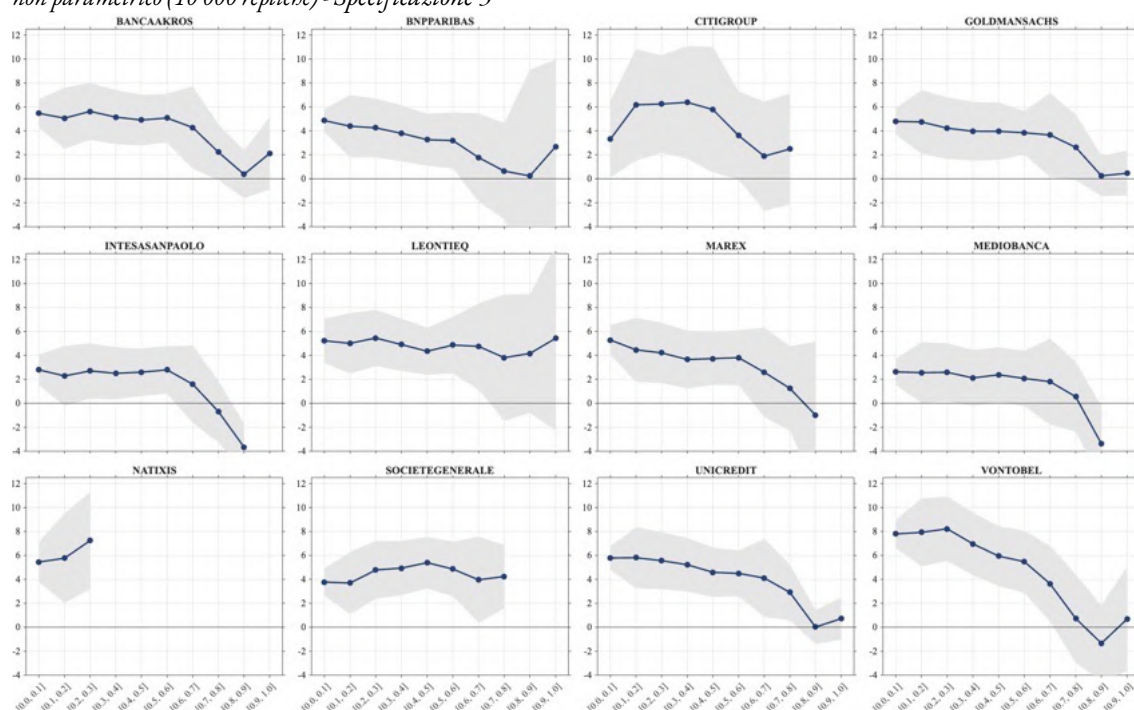
Figura 4.3 – Evoluzione significatività dei coefficienti δ – Standard error stimati mediante bootstrap non parametrico (10'000 repliche) - Specificazione 3



⁶⁷ I coefficienti rappresentano lo scostamento percentuale di markup rispetto all'emittente baseline per ciascuna finestra w . Le bande grigie indicano intervalli di confidenza al 90% calcolati mediante bootstrap non-parametrico (10.000 repliche). I punti rossi rappresentano i coefficienti δ statisticamente significativi ($p < 0,10$) mentre i quadrati rappresentano gli emittenti che, per la finestra w in esame, sono stati considerati come baseline ($\delta = 0$ per costruzione).

Data la progressiva riduzione della numerosità campionaria con l'approssimarsi della scadenza, l'analisi si suggerisce di concentrare l'attenzione prioritariamente sulla prima metà del ciclo di vita ($Lifetime < 0,5$), dove la robustezza statistica delle stime risulta maggiormente garantita. Oltre a consentire il confronto delle politiche di pricing tra i principali emittenti attivi nel mercato italiano, la presente specificazione consente di analizzare la dinamica del markup lungo il ciclo di vita del prodotto a livello di singolo emittente. Ciò permette di verificare se, anche nel mercato italiano, i costi impliciti tendano a ridursi con l'avvicinarsi della scadenza in coerenza con la Life cycle hypothesis. A tale scopo, per ciascun emittente e finestra temporale si calcola il markup assoluto atteso come somma dell'intercetta α_w e del coefficiente $\delta_{j,w}$ specifico dell'intermediario rappresentabile come $\Pi_{i,w} = \alpha_w + \delta_{j,w}$.

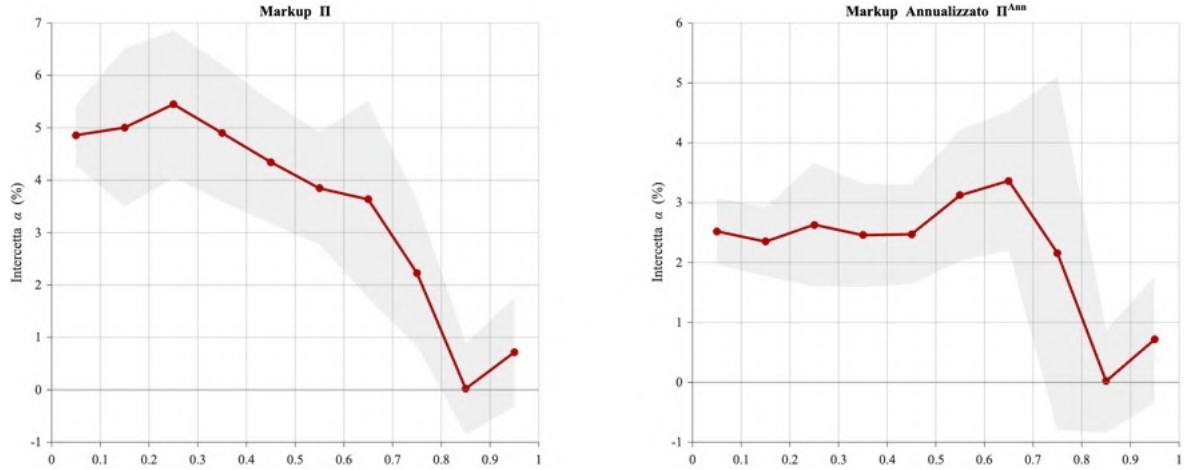
Figura 4.4 – Evoluzione markup medio per emittente lungo il ciclo di vita – Standard error stimati mediante bootstrap non parametrico (10'000 repliche) - Specificazione 3



Dall'analisi della **Figura 4.4** emerge che, nel mercato italiano, i costi impliciti Π_i dei certificati di investimento mostrano una tendenza decrescente al crescere della maturità residua. Tale andamento è particolarmente evidente per gli emittenti Vontobel, Marex, BNP Paribas, Banca Akros e Goldman Sachs, per i quali la riduzione dei costi impliciti risulta graduale lungo l'intero ciclo di vita del prodotto. Al contrario, nel caso di Mediobanca, Intesa Sanpaolo e Unicredit, l'evidenza empirica suggerisce una dinamica differente, caratterizzata da una sostanziale stabilità dei costi impliciti nelle fasi iniziali del ciclo di vita del prodotto ($Lifetime < 60\%$) e da una contrazione dei markup concentrata nelle fasi finali. Nel caso di Leonteq, così come per Société Générale fino al 70% del ciclo di vita del prodotto, non emergono evidenze di una riduzione dei costi impliciti da questo tipo di analisi che non risulta applicabile in riferimento all'emittente Natixis, a causa della scarsità di dati riferiti alle fasi centrali e conclusive del naturale orizzonte temporale dei certificati in perimetro.

Dall'analisi condotta, risulta interessante sottolineare come tale relazione risulti maggiormente apprezzabile confrontando il markup con il coefficiente di vita residua $Lifetime$ rispetto agli anni di negoziazione residui. Questa dinamica si riflette direttamente nella stima dell'intercetta α_w associata a $\Pi_{i,w}$ e, in modo altrettanto significativo, emerge anche considerando i costi impliciti annualizzati $\Pi_{i,w}^{Ann}$. Ciò suggerisce che la compressione dei margini lungo l'intero ciclo di vita non sia lineare (come appare fino a $Lifetime < 0,5$), ma presenti variazioni legate a momenti specifici del ciclo di vita del prodotto.

Figura 4.5–Evoluzione dell'intercetta α_w lungo il ciclo di vita – Markup e Markup annualizzato– Specificazione 3



Al fine di confermare in maniera più rigorosa il decremento del markup lungo il ciclo di vita del prodotto, si utilizza il modello di regressione lineare di [Stoimenov e Wilkens, 2005](#), largamente adottato nella letteratura per la verifica empirica della Life Cycle Hypothesis:

$$\Pi_{i,t} = a + b \cdot Lifetime_{i,t} + \epsilon_{i,t} \quad (R.04)$$

in cui il termine a cattura il markup iniziale medio all'emissione, mentre b misura la velocità con cui il markup tende a ridursi nel tempo. La validità della Life Cycle Hypothesis risulterebbe confermata nel caso in cui il coefficiente b risulti negativo e statisticamente significativo. Diversamente da [Stoimenov e Wilkens, 2005](#), che studiano i prezzi di mercato secondario in una singola data⁶⁸ mediante un'analisi cross-section, con l'obiettivo isolare l'effetto temporale e di monitorare l'evoluzione dinamica del markup per lo stesso certificato lungo tutto il suo orizzonte temporale, si preferisce sfruttare l'intero dataset panel caratterizzato da osservazioni ripetute su base quotidiana. In ragione di questo, per ciascun certificato $i = 1, \dots, N$ si stima separatamente la relazione presentata nella **Regressione 04** ottenendo così N stime individuali del coefficiente b $\{b_1, b_2, \dots, b_N\}$. Successivamente, viene testata l'ipotesi $H_0: \mathbb{E}[b_i] = 0$ mediante la statistica test:

$$t = \frac{\bar{b}}{SE(\bar{b})}, \quad \text{con} \quad \bar{b} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N b_i. \quad (120)$$

⁶⁸ Nel paper citato l'analisi empirica fa riferimento alla sola giornata del 10 ottobre 2002

Al fine di concentrare l'analisi sulla fase del ciclo di vita in cui emerge la compressione del markup documentata nell'evidenza grafica, si includono esclusivamente i certificati per i quali si osserva almeno un valore di $Lifetime > 0,5$ garantendo così che ciascun prodotto attraversi la seconda metà del proprio ciclo di vita. Per via della presenza di eteroschedasticità in tali stime e per evitare assunzioni sulla distribuzione delle stesse, i p-value ottenuti in maniera parametrica sono confrontati con, i p-value calcolati mediante bootstrap-t⁶⁹.

Tabella 4.4 – Stime Regressione R.04, confronto tra p-value OLS e p-value bootstrap (1'000 repliche) ⁷⁰

Emittente	Media a	Mediana b	Media b	SE	p-value (p.)	p-value (b.)	N. ISIN	% b < 0
Unicredit	7.33	-6.09	-7.48	0.89	0.00 ***	0.00 ***	140	87.14
Société Générale	6.30	-6.37	-6.56	0.43	0.00 ***	0.00 ***	137	94.89
Citigroup	6.80	-2.92	-5.83	2.80	0.06 *	0.06 *	12	83.33
Mediobanca	-0.19	-6.07	-5.45	1.06	0.00 ***	0.00 ***	24	83.33
Goldman Sachs	2.14	-4.24	-3.26	1.15	0.01 **	0.01 **	33	72.73
Banca Akros	2.58	-2.21	-2.81	0.96	0.00 ***	0.01 ***	59	57.63
Intesa Sanpaolo	0.63	-2.35	-2.64	0.95	0.01 ***	0.01 ***	32	62.50
BNP Paribas	7.86	-2.15	-2.52	1.36	0.07 *	0.07 *	98	59.18
Vontobel	11.90	0.20	-1.07	1.94	0.58	0.58	59	49.15
Marex	4.50	0.02	-1.06	1.56	0.50	0.50	40	50.00
Leonteq	7.62	2.55	0.64	2.38	0.79	0.79	39	35.90

L'analisi conferma come il markup dei certificati tende a ridursi lungo il ciclo di vita del prodotto. Il coefficiente b è stato rilevato negativo e significativo, almeno al livello del 10%, in 8 degli 11 emittenti analizzati. Per tali intermediari, si rileva un'incidenza di singoli prodotti con markup in decremento (% $b < 0$) che varia dal 59% al 94%, a seconda dell'emittente. Seppur tale analisi confermi generalmente l'ipotesi in esame, emerge che, per Marex, Leonteq e Vontobel (emittente caratterizzato inoltre dal maggior coefficiente a rappresentativo del markup al momento dell'emissione), non si riscontrano evidenze statisticamente significative a supporto della Lifecycle Hypothesis. I risultati ottenuti tramite bootstrap confermano la robustezza delle evidenze statistiche rilevate con i test parametrici, sebbene per alcuni emittenti emergano differenze rilevanti tra la media e la mediana del coefficiente b stimato, suggerendo la presenza di asimmetrie marcate e di possibili outlier nelle rilevazioni di Leonteq e Citigroup.

Per verificare la robustezza dei risultati ottenuti dalla precedente analisi e validare la presenza pressoché generalizzata dell'effetto lifecycle su diverse coorti di prodotti, viene inoltre replicato l'approccio metodologico proposto da [Stoimenov e Wilkens, 2005](#). Con questo fine sono state selezionate tre date: il 10 ottobre 2024 (esattamente 22 anni più tardi rispetto allo studio di riferimento), il 24 aprile 2025 (giorno con il maggior numero di osservazioni disponibili) e il 17 giugno 2025 (ultima data disponibile). Per ciascuna data e ciascun emittente, è stato stimato il modello descritto nella **Regressione R.04**. In **Tabella 4.5** vengono presentate le risultanze della regressione accompagnate dai rispettivi p-value calcolati sia con la metodologia OLS standard che mediante cluster bootstrap, analogamente a quanto

⁶⁹ si ricampionano con reinserimento gli N coefficienti $\{b_1, \dots, b_N\}$, costruisce la statistica $t^* = (\bar{b}^* - \bar{b})/SE(\bar{b}^*)$ per $B = 1000$ repliche e viene calcolato il p-value come la proporzione di $|t^*| \geq |t|$

⁷⁰ Con N.ISIN fa riferimento al numero di prodotti, per ciascun emittente, considerati nell'ambito della presente analisi. Con % $b < 0$ si denota l'incidenza di prodotti per cui la stima di b risulta avere un segno coerente con la Life Cycle Hypothesis

fatto nel paper originale con l'obiettivo di fronteggiare la forte eteroschedasticità delle stime. Al fine di fornire ulteriori elementi di valutazione sulla composizione e rappresentatività del campione analizzato, la tabella include inoltre il numero di prodotti considerati per ciascun emittente e la percentuale di osservazioni con *Lifetime* superiore a 0,5 (in **Tabella 4.5** riportata come % $L > 0.5$) consentendo di verificare, seppur ad alto livello, l'equilibrio del campione tra le diverse fasi del ciclo di vita dei certificati.

Tabella 4.5 – Risultati Regressione R04, confronto tra *p-value* OLS e *p-value* bootstrap (1'000 repliche)

Date	Emittente	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>p-v</i> (OLS)	<i>p-v</i> (Boot)	<i>R</i> ²	N.Prod	% $L > 0.5$
10-Oct-24	Banca Akros	7.77	-13.37	0.00 ***	0.00 ***	0.26	69	46.4
	BNP Paribas	4.25	10.10	0.05	0.01	0.04	88	29.5
	Citigroup	-9.89	21.91	0.18	0.10	0.15	13	69.2
	Goldman Sachs	3.16	-4.49	0.01 ***	0.00 ***	0.13	52	30.8
	Intesa Sanpaolo	0.68	-2.38	0.05 **	0.01 ***	0.08	49	51.0
	Leonteq	-1.93	22.04	0.01	0.00	0.15	43	48.8
	Marex	8.57	-5.71	0.15	0.06 *	0.03	65	23.1
	Mediobanca	1.21	-5.84	0.08 *	0.00 ***	0.07	43	20.9
	Soc. Générale	5.89	-3.64	0.09 *	0.08 *	0.02	139	0.0
	UniCredit	10.64	-12.86	0.00 ***	0.00 ***	0.14	126	21.4
	Vontobel	16.58	-9.54	0.04 **	0.02 **	0.05	86	18.6
17-Jun-25	Banca Akros	4.16	-4.64	0.04 **	0.00 ***	0.06	69	63.8
	BNP Paribas	6.54	-0.21	0.95	0.96	0.00	135	69.6
	Citigroup	3.02	-4.98	0.31	0.23	0.08	15	66.7
	Goldman Sachs	5.10	-5.03	0.19	0.07 *	0.04	45	40.0
	Intesa Sanpaolo	0.83	-5.06	0.00 ***	0.00 ***	0.20	50	64.0
	Leonteq	8.08	-2.21	0.71	0.57	0.00	49	73.5
	Marex	8.72	-7.19	0.03 **	0.03 **	0.05	88	42.0
	Mediobanca	4.10	-10.95	0.00 ***	0.00 ***	0.30	73	31.5
	Natixis	4.13	16.13	0.03	0.14	0.17	30	13.3
	Soc. Générale	6.81	-7.81	0.00 ***	0.00 ***	0.36	255	30.6
	UniCredit	11.07	-12.69	0.00 ***	0.00 ***	0.20	218	61.0
	Vontobel	16.01	-12.94	0.00 ***	0.00 ***	0.07	116	45.7
24-Apr-25	Banca Akros	3.80	-5.45	0.00 ***	0.00 ***	0.14	84	57.1
	BNP Paribas	8.17	-7.06	0.03 **	0.00 ***	0.03	140	55.7
	Citigroup	-17.34	26.68	0.14	0.01	0.19	13	92.3
	Goldman Sachs	1.86	-1.68	0.55	0.48	0.01	39	46.2
	Intesa Sanpaolo	1.14	-6.15	0.00 ***	0.00 ***	0.30	50	62.0
	Leonteq	7.32	-0.10	0.99	0.98	0.00	51	72.5
	Marex	10.31	-10.19	0.00 ***	0.00 ***	0.09	90	37.8
	Mediobanca	3.09	-10.98	0.00 ***	0.00 ***	0.31	69	24.6
	Natixis	6.00	12.52	0.21	0.27	0.08	22	9.1
	Soc. Générale	6.04	-7.12	0.00 ***	0.00 ***	0.35	265	27.5
	UniCredit	11.24	-13.58	0.00 ***	0.00 ***	0.32	220	49.1
	Vontobel	19.32	-17.41	0.00 ***	0.00 ***	0.14	116	39.7

4.3. Comparazione Certificati Maxi Cedola e Cash Collect

Dopo aver fornito evidenza empirica della presenza della Life Cycle Hypothesis anche nel mercato italiano, un'ulteriore estensione della specificazione proposta consente di analizzare se, e attraverso quali canali, elementi di natura fiscale influenzino le politiche di pricing degli emittenti lungo il ciclo di vita del prodotto. Relazioni di questo tipo sono già state studiate in riferimento al mercato tedesco in riferimento al beneficio fiscale derivante dalla detassazione di proventi finanziari derivanti da un holding period dello strumento per una durata superiore ad un anno. Secondo il quadro teorico della Order Flow Hypothesis proposta da [Wilkens, Erner, Röder, 2003](#) e successivamente sviluppata e testata da [Baule, 2011](#), è possibile che gli emittenti anticipino i maggiori flussi in acquisto vicino a tale scadenza e applichino markup più elevati, riducendo al contrario il prezzo quando prevedono maggiori ordini in vendita. Come introdotto in precedenza, seppur la normativa fiscale italiana non preveda benefici analoghi, un vantaggio fiscale emerge a riguardo dei certificati Maxi cedola, i quali risultano strutturati in maniera peculiare al fine di sfruttare in modo ottimale la possibilità di compensare eventuali

minusvalenze pregresse mediante l'erogazione di un consistente flusso cedolare nelle primissime fasi del ciclo di vita del prodotto ($Lifetime < 0,1$) che, seppur formalmente condizionato, risulta nella pratica pressoché certo. La possibilità di compensazione delle minusvalenze, scadendo dopo cinque anni, fa sì che coloro che abbiano tali minusvalenze in scadenza traggano beneficio ad acquistare questo prodotto in fase di emissione o nei primissimi giorni di negoziazione per poi cederlo, seppur a prezzo ridotto, a seguito dell'incasso della Maxi Cedola. In ragione di questo, risulta coerente immaginare una concentrazione delle vendite in un periodo compreso tra $Lifetime$ 0,1 e $Lifetime$ 0,3.

Essendo tali prodotti, dal punto di vista del profilo di payoff a scadenza, del tutto assimilabili ai più classici certificati Cash Collect, risulta naturale un confronto tra tali prodotti.

In ragione di questo, in linea alla specificazione proposta, viene effettuata la seguente regressione:

$$\Pi_{i,w} = \alpha_w + \gamma_w \cdot I_{\{\text{MaxiCedola}\}_i} + \beta_w \cdot (R_i - \bar{R}_w) + \varepsilon_{i,w} \quad (R.05)$$

Con $I_{\{\text{MaxiCedola}\}_i}$ che rappresenta una variabile di tipo dummy con valore 1 nel caso in cui il prodotto in esame sia un prodotto “Maxi Cedola” e 0 nel caso in cui si sta facendo riferimento ad un certificato Cash Collect. All'interno del dataset di riferimento sono mantenute solo queste due tipologie di prodotto. Il coefficiente γ_w risulta per questo funzionale alla verifica, a parità di durata residua e di livello di rischio, di eventuali differenze tra le politiche di pricing degli emittenti tra queste tipologie di prodotti. Le risultanze di questa analisi mostrano dei risultati di estremo interesse se interpretati alla luce della Order Flow Hypothesis.

Tabella 4.6 – Risultanze Regressione R.05, standard error bootstrap (1'000 repliche)

Finestra Lifetime	Numerosità campione		Stime (γ_w)			
	Maxi Cedola	Cash Collect	Coefficiente	SE Boot.	t-stat	p-value
0.00 – 0.10	117	496	−0.515	0.428	−1.20	0.2299
0.10 – 0.20	105	455	−0.985*	0.537	−1.83	0.0670
0.20 – 0.30	98	418	−0.747	0.548	−1.36	0.1735
0.30 – 0.40	85	389	−0.485	0.642	−0.76	0.4502
0.40 – 0.50	79	303	−0.322	0.754	−0.42	0.6732
0.50 – 0.60	66	261	−0.753	0.777	−0.97	0.3336
0.60 – 0.70	40	210	0.097	1.117	0.09	0.9309
0.70 – 0.80	21	188	−0.256	1.732	−0.15	0.8826
0.80 – 0.90	8	131	−0.506	2.760	−0.18	0.8549

Seppur tali prodotti siano caratterizzati da costi impliciti assimilabili, nelle fasi immediatamente successive all'erogazione della Maxi Cedola in cui risulta coerente immaginare una maggiore concentrazione di vendite, i certificati Maxi Cedola appaiono caratterizzarsi da un markup relativamente inferiore rispetto alle altre fasi del ciclo di vita dello strumento. Nello specifico, la finestra $Lifetime$ 0,1-0,2 risulta l'unica in cui si rilevano delle differenze statisticamente significative (p-value < 0,1) in linea con le ipotesi formulate. Questo comportamento, seppur richiedendo un'analisi più approfondita comprensiva dei volumi effettivamente negoziati per essere confermato in maniera estremamente

rigorosa⁷¹, sembra riflettere una gestione strategica della pressione netta in vendita da parte dell'emittente, coerente con la Order Flow Hypothesis. In tale contesto, l'emittente, al fine di massimizzare i profitti, riduce strategicamente l'esborso necessario per il riacquisto dello strumento, consolidando come profitto la differenza tra il markup elevato applicato all'investitore al momento dell'acquisto, in un contesto in cui il prezzo di mercato è superiore rispetto al prezzo disponibile in un mercato frictionless, e quello ridotto applicato nella successiva fase di vendita (contesto in cui all'investitore gioverebbe la presenza di markup più elevato).

A differenza di quanto documentato da Baule, 2011 per il mercato tedesco⁷², dove gli emittenti risultano appropriarsi di una quota del vantaggio fiscale attraverso l'applicazione di un markup addizionale sui prodotti fiscalmente più efficienti, l'analisi condotta nel mercato italiano non sembra evidenziare dinamiche di questo tipo. Le risultanze presentate nella **Tabella 4.6** appaiono maggiormente coerenti con Szymanowska, Ter Horst e Veld, 2009 e con Burth, Kraus e Wohwend, 2001, che non individuano nella fiscalità una determinante primaria dell'overpricing, evidenziando come i livelli di markup siano maggiormente riconducibili a fattori strutturali e competitivi che non al solo trattamento fiscale. Risulta a questo punto opportuno approfondire i principali fattori strutturali che determinano i livelli di markup nel mercato italiano, spostando l'attenzione dalla componente fiscale a elementi di mercato più generali anche al fine di confrontare i risultati con le evidenze disponibili in altri mercati esteri.

4.4. Analisi delle determinanti del Markup

L'analisi dei fattori strutturali che determinano i livelli di markup nei certificati di investimento si basa metodologicamente sul framework empirico sviluppato da Baule, 2011 per il mercato tedesco rappresentato da una regressione panel pooled OLS stimata separatamente per ciascun emittente in cui la variabile dipendente (il markup) viene regredita su un insieme di variabili esplicative potenzialmente funzionali a spiegare i costi impliciti.

$$\Pi_{i,t} = \alpha + \beta'X_{i,t} + \varepsilon_{i,t} \quad (121)$$

dove $X_{i,t}$ rappresenta l'insieme dei regressori che verranno presentati nelle successive sezioni. La presente analisi adotta il medesimo impianto econometrico di base suggerendo però quattro modifiche sostanziali motivate da altrettante problematiche metodologiche che emergono dall'analisi dei residui della specificazione proposta nel modello originale:

⁷¹ Diversi studi discutono l'effettiva presenza di questa dinamica, riportando risultati talvolta contrastanti sull'order flow hypothesis. Il mercato italiano, per le specificità del suo impianto tributario, potrebbe costituire un caso di studio particolarmente adatto per verificarne l'esistenza.

⁷² In Baule, 2011 si evidenzia come, nel mercato tedesco, gli emittenti applicano un markup aggiuntivo sui prodotti fiscalmente efficienti, appropriandosi di circa il 7% del vantaggio fiscale complessivo dell'investitore.

1. Bilanciamento del numero di osservazioni per ciascun prodotto:

Ciascun certificato in analisi è caratterizzato da un numero differente di rilevazioni storiche. Alcuni prodotti dispongono di poche osservazioni mentre per altri, negoziati da anni, sono presenti più di 500 confronti giornalieri (tra loro dipendenti) tra il prezzo a cui lo strumento è negoziato ed il fair value stimato a valle del framework proposto. L'utilizzo di tutte le rilevazioni quotidiane disponibili attribuirebbe implicitamente un maggior peso ai certificates con una storia di negoziazione più lunga, generando una distorsione nell'analisi complessiva. Si è per questo deciso di adottare una strategia di campionamento casuale. Per ciascun prodotto vengono estratte da una distribuzione uniforme 25 osservazioni scartando tutte le restanti⁷³. In questo modo, ciascun certificato contribuisce con un numero omogeneo di osservazioni alla stima.

Tale scelta è inoltre motivata dalla volontà di ridurre l'estrema dipendenza seriale rilevabile sia in riferimento alla variabile dipendente così come nei regressori individuati qualora la stima venga effettuata sull'intero campione di osservazioni giornaliere.

L'efficacia del campionamento nel mitigare l'autocorrelazione è documentata empiricamente tramite la statistica Durbin-Watson. Come evidenziato nella **Tabella 4.7**, Il campionamento casuale riduce le osservazioni del 91,9% (da 373'144 a 30'276 rilevazioni)⁷⁴.

Tabella 4.7 – Statistiche Durbin-Watson pre-post campionamento e numero di osservazioni scartate

Emittente	DW (tutti)	DW (25 snap)	ΔDW	N (tutti)	N (25 snap)	Obs. perse	% riduz.
Banca Akros	0.057	0.199	0.142	35.823	2100	33.723	94.1
BNP Paribas	0.269	0.501	0.233	49.155	3500	45.655	92.9
Citigroup	0.121	0.497	0.375	9323	325	8998	96.5
Goldman Sachs	0.196	0.409	0.213	26.356	1750	24.606	93.4
Intesa Sanpaolo	0.156	0.503	0.348	32.554	1250	31.304	96.2
Leonteq	0.173	0.489	0.316	24.943	1300	23.643	94.8
Marex	0.267	0.472	0.205	30.848	2325	28.523	92.5
Mediobanca	0.158	0.345	0.187	20.376	1775	18.601	91.3
Natixis	0.327	0.419	0.092	3293	675	2618	79.5
Société Générale	0.356	0.486	0.130	48.387	6650	41.737	86.3
UniCredit	0.199	0.477	0.278	58.355	5550	52.805	90.5
Vontobel	0.338	0.554	0.216	33.731	3075	30.656	90.9
Media	0.218	0.446	0.228	31.095	2523	28.572	91.6

2. Autocorrelazione – Trasformazione Cochrane-Orcutt:

Nonostante il campionamento casuale riduca sostanzialmente l'autocorrelazione seriale, l'analisi diagnostica dei residui rivela la persistenza di correlazione temporale significativa a livello di singolo

⁷³ Qualora la serie storica del certificato in esame sia rappresentata da meno di 25 giornate, questo non rientra nell'analisi qui descritta

⁷⁴ Al fine di verificare che la riduzione del campione non comporti una contestuale perdita strutturale di informazione, è stata valutata la metrica D-efficiency, rappresentativa dell'informazione statistica contenuta nei regressori e calcolata come rapporto tra le determinanti delle matrici del campione completo e dataset "post campionamento" (normalizzato per la dimensione del modello). Il valore medio, per emittente, pari a 0,981 non evidenzia perdite strutturali nell'informazione rimaste.

prodotto. Questo viene confermato dalla statistica Durbin-Watson calcolata considerando, per certificate, le 25 rilevazioni estratte⁷⁵. Tale evidenza non può essere ignorata principalmente per due ragioni:

- **Bias nei coefficienti:** con regressori persistenti l'autocorrelazione degli errori può distorcere le stime OLS, facendo deviare la media dei coefficienti dal vero valore. (Wooldridge, 2010)
- **Inefficienza:** anche se le stime rimangono corrette, la dipendenza seriale aumenta la varianza degli stimatori, riducendo precisione e affidabilità dei test statistici. (Hamilton, 1994)

In ragione di questo, si fa ricorso alla procedura iterativa di [Cochrane-Orcutt, 1949](#) applicata all'interno di ciascun certificate.

Dopo aver stimato il coefficiente di autocorrelazione $\hat{\rho}_i$ tramite la regressione ausiliaria $\hat{\varepsilon}_{it} = \rho_i \hat{\varepsilon}_{i,t-1} + v_{it}$ ⁷⁶ dati e i regressori vengono trasformati come segue:

$$\Pi_{i,t}^* = \Pi_{i,t} - \hat{\rho}_i \Pi_{i,t-1} \quad (122)$$

$$X_{i,t}^* = X_{i,t} - \hat{\rho}_i X_{i,t-1} \quad (123)$$

Il nuovo modello da stimare sarà per questo rappresentato da

$$\Pi_{i,t}^* = \alpha + \beta' X_{i,t}^* + \varepsilon_{i,t}^* \quad (R.06)$$

Dall'analisi dei singoli certificati emerge che la stima media del coefficiente di autocorrelazione $\hat{\rho}_i$ risulta pari a 0,50 giustificando l'applicazione di tale trasformazione.

L'applicazione della trasformazione Cochrane-Orcutt, come evidenziato nella **Tabella 4.8** riduce in modo sostanziale l'autocorrelazione residua. In termini aggregati, la statistica Durbin-Watson passa da valori medi per emittente pari a 0,446 fino a 1,358 post correzioni, riflettendo miglioramenti sistemici in tutti i casi⁷⁸.

Tabella 4.8 – Risultati regressione ausiliaria Cochrane-Orcutt e numero di osservazioni perse

Emittente	DW pre C-O	DW post C-O	Δ DW	$\hat{\rho}$ medio	N pre C-O	N post C-O	Obs. perse
Banca Akros	0,199	1,089	0,890	0,558	2100	2016	84
BNP Paribas	0,501	1,669	1,168	0,456	3500	3360	140
Citigroup	0,497	1,161	0,664	0,523	325	312	13
Goldman Sachs	0,409	1,627	1,218	0,616	1750	1680	70
Intesa Sanpaolo	0,503	1,709	1,206	0,711	1250	1200	50
Leonteq	0,489	1,372	0,883	0,587	1300	1248	52
Marex	0,472	1,083	0,611	0,421	2325	2232	93
Mediobanca	0,345	1,490	1,145	0,548	1775	1704	71
Natixis	0,419	0,908	0,489	0,379	675	648	27
Société Générale	0,486	1,401	0,915	0,455	6650	6384	266
Unicredit	0,477	1,440	0,963	0,466	5550	5328	222
Vontobel	0,554	1,342	0,788	0,387	3075	2952	123
Media	0,446	1,358	0,912	0,509	2523	2422	101

⁷⁵ I risultati evidenziano come, in media, l'86% dei prodotti per emittente presenti una statistica DW < 1,2

⁷⁶ I residui $\hat{\varepsilon}_{it}$ sono quelli ottenuti dalla stima originale per il certificato i al tempo t . $\hat{\varepsilon}_{i,t-1}$ indica il residuo del periodo precedente dello stesso prodotto. L'errore v_{it} rappresenta il residuo non autocorrelato della regressione ausiliaria.

⁷⁷ L'asterisco indica le variabili trasformate.

⁷⁸ Per via delle caratteristiche della trasformazione, come evidenziato nei risultati presentati in **Tabella 4.8** si perde un'ulteriore osservazione per ciascun prodotto.

3. Autocorrelazione – Errori standard robusti a cluster:

L'applicazione della trasformazione Cochrane-Orcutt mitiga sostanzialmente ma non elimina completamente l'autocorrelazione seriale⁷⁹. Inoltre, la struttura dei dati, per costruzione, presenta osservazioni “raggruppate per prodotto” che potrebbe violare l'assunzione di indipendenza degli errori necessaria per la validità degli errori standard OLS classici. Al fine di ottenere un'inferenza statistica quanto più solida e conservativa che non si limita alla gestione dell'eteroschedasticità⁸⁰, si adottano errori standard cluster-robust⁸¹ (Liang, Zeger, 1986; Arellano, 1987), in grado di gestire anche situazioni caratterizzate da elevate correlazioni tra le osservazioni dello stesso certificato.

Tale scelta non è ridondante rispetto all'adozione della trasformazione Cochrane-Orcutt, poiché quest'ultima corregge il bias dei coefficienti dovuto all'autocorrelazione seriale AR(1), mentre gli errori cluster-robust risultano funzionali a garantire la validità dell'inferenza statistica mediante la correzione degli errori standard. Tale approccio non è nuovo nella letteratura sui certificati strutturati. La necessità di considerare la correlazione intra-cluster, derivante da osservazioni ripetute sullo stesso strumento, è stata evidenziata da Schertler, 2016 attraverso il ricorso ad errori standard cluster-robust a livello di singolo certificato ed in Entrop et al., 2016⁸²

4. Rimozione degli outlier mediante Cook's distance:

Un ulteriore elemento che differenzia tale framework rispetto all'importante lavoro di Baule, 2011 è rappresentato dalla rimozione di alcune osservazioni identificate come outlier che potrebbero distorcere le stime dei coefficienti. A tal fine, successivamente all'applicazione della trasformazione Cochrane-Orcutt, vengono identificati i potenziali outlier mediante la Cook's Distance (Cook, 1977). Per ciascuna osservazione si calcola la statistica di Cook definita come

$$D_i = \frac{e_i^2}{K \cdot MSE} \cdot \frac{h_{ii}}{(1-h_{ii})^2}, \quad (124)$$

dove e_i rappresenta il residuo della regressione Cochrane-Orcutt, K il numero di parametri stimati, MSE l'errore quadratico medio del modello e h_{ii} misura il leverage dell'osservazione, ovvero quanto si discosta rispetto altre osservazioni. Vengono individuate e rimosse le osservazioni per le quali la statistica D_i eccede $4/N$ ⁸³ con N che rappresenta il numero di osservazioni a valle dell'applicazione della

⁷⁹ L'applicazione di Cochrane-Orcutt non elimina dipendenze temporali di ordine superiore (AR(p) con $p > 1$) o forme non lineari di autocorrelazione.

⁸⁰ In Baule, 2011 vengono adottati errori standard di White robusti all'eteroschedasticità

⁸¹ Lo stimatore della matrice di varianza-covarianza cluster-robust è definito come

$\hat{V}_{CR} = (X'X)^{-1} \left[\sum_{g=1}^G X_g' \varepsilon_g \varepsilon_g' X_g \right] (X'X)^{-1}$, con G rappresentativo del numero di cluster, X_g la matrice dei regressori e ε_g il vettore dei residui del cluster g .

⁸² Entrop et al., 2016 studiano le determinanti delle scelte degli investitori retail nel mercato tedesco dei certificati, evidenziando come fattori comportamentali (familiarità con l'emittente) prevalgano rispetto alle componenti di costo. Dal punto di vista metodologico, lo studio adotta errori standard cluster-robust a livello di singolo investitore per correggere la correlazione tra le molteplici decisioni d'acquisto dello stesso individuo.

⁸³ La soglia $4/N$ per la statistica di Cook rappresenta una regola empirica comunemente adottata in letteratura (Chatterjee, Hadi, 2006)

trasformazione Cochrane-Orcutt. Anche in questo caso si tratta di una pratica consolidata nelle ricerche più accreditate in ambito investment certificates di cui il già citato lavoro di Jørgensen et al., 2011 rappresenta un chiaro esempio.

Tabella 4.9 – Regressione R.06, numero di outlier rilevati, variazione RMSE post trasformazione Cochrane-Orcutt

Emittente	N Post C-O	N Post Cook's	Outlier	% Out	RMSE Post C-O	RMSE Post Cook's	Δ RMSE
Banca Akros	2016	1892	124	6,2	1,59	1,21	-0,38
BNP Paribas	3360	3174	186	5,5	2,75	2,18	-0,57
Citigroup	312	293	19	6,1	4,02	3,45	-0,57
Goldman Sachs	1680	1544	136	8,1	0,92	0,71	-0,21
Intesa Sanpaolo	1200	1129	71	5,9	0,82	0,64	-0,18
Leonteq	1248	1159	89	7,1	2,75	2,23	-0,52
Marex	2232	2056	176	7,9	3,30	2,78	-0,52
Mediobanca	1704	1587	117	6,9	1,08	0,82	-0,26
Natixis	648	587	61	9,4	2,66	2,15	-0,51
Société Générale	6384	5979	405	6,3	1,28	0,98	-0,30
Unicredit	5328	4981	347	6,5	2,39	1,89	-0,50
Vontobel	2952	2778	174	5,9	3,75	3,18	-0,57
Media	2422	2263	159	6,8	2,28	1,67	-0,61

L'applicazione della procedura di rimozione degli outlier, come evidenziato dalla **Tabella 4.9** porta all'eliminazione di 1905 osservazioni rappresentative del 6,8% del campione "post-Cochrane-Orcutt"⁸⁴. La maggiore incidenza di outlier è riscontrabile nel caso di Natixis (9,4 % del totale) mentre, al contrario, nel caso di BNP Paribas, vengono rimosse il 5,5% delle osservazioni. L'esclusione di questi valori estremi apporta delle migliorie anche nella capacità predittiva del modello evidenziato dalla diminuzione del RMSE che passa da 2,28 a 1,67 e dall'incremento della statistica R².

Scelta delle variabili e della specificazione econometrica

Dopo aver descritto la strategia di stima, si illustrano le variabili incluse nella stima.

La variabile dipendente $\Pi_{i,t}$ rappresenta il markup percentuale. Il rischio del prodotto è catturato dalla variabile **Risk_{i,t}**, costruita dall'indicatore sintetico di rischio $\mathcal{R}_t$ illustrato nel Capitolo 2 del presente elaborato. L'inclusione del termine quadratico **Risk_{i,t}²** consente di testare la presenza di effetti non lineari nella relazione tra rischio e markup, alla luce della marcata significatività statistica già riscontrata per il termine lineare nel contesto dell'analisi all'emissione. Entrambe le variabili sono state centrate rispetto alla media rilevata per l'emittente.⁸⁵ La variabile **DivYield_p**, in coerenza con Baule, 2016, viene definito

⁸⁴ La perdita informativa indotta dalla rimozione degli outlier tramite Cook's distance anch'essa valutata tramite D-efficiency evidenzia un valore medio per emittente pari a 0,891.

⁸⁵ Per esempio, nel caso della variabile **Risk_{i,t}** e con riferimento all'emittente j , essa è definita come $Risk_{i,t} = \mathcal{R}_{i,t} - \bar{\mathcal{R}}_j$ con $\bar{\mathcal{R}}$ che rappresenta la media dell'indicatore sintetico di rischio rilevato per l'emittente j .

come il valore attuale dei dividendi attesi dai sottostanti lungo la vita residua del prodotto scontati⁸⁶ al tasso risk free:

$$\text{DivYield}_{p,t} = \frac{\text{DivYield}_{\text{ann}} \cdot T_t}{(1+r_t)^{T_t}}, \quad (126)$$

Nel caso in cui per il certificato in esame siano previsti più sottostanti, il peso di ciascun titolo j nel computo di $\text{DivYield}_{\text{ann}}$ viene calcolato in base alla probabilità $\text{Prob}_K K_{i,t}$ che questo si trovi sotto la barriera a scadenza:

$$\text{peso sottostante}_{i,t} = \frac{\text{Prob}_K K_{i,t}}{\sum_{j=1}^J \text{Prob}_K K_{j,t}} \quad (127)$$

Come evidenziato in precedenza, l'approccio è giustificato dal fatto che il prezzo di un certificato multiasset dipende prevalentemente dal sottostante, che ha maggiori probabilità di essere il worst-of alla scadenza.

La variabile **logMktCap** rappresenta il logaritmo naturale della capitalizzazione di mercato del sottostante (o media dei sottostanti nel caso di certificati multiasset).

La variabile **Multi** è una variabile di tipo dummy che assume valore 1 nel caso in cui il certificato in esame comprenda più di un sottostante, 0 nel caso di un solo asset.

La variabile **Lifetime**, così come presentato in precedenza, rappresenta il coefficiente di vita residua relativa, funzionale a normalizzare la fase del ciclo di vita dello strumento.

La variabile **TTM** (time to maturity) rappresenta, in anni, il tempo residuo alla scadenza naturale del prodotto.

La variabile **Safe**, anch'essa di tipo dummy, risulta essere pari ad 1 qualora il sottostante (o il peggiore di essi⁸⁸ nel caso di prodotti multi-asset) sia quotato a prezzo superiore del 60% rispetto alla barriera per la protezione del capitale a scadenza. Tale variabile assume valore pari a 0 negli altri casi e per i prodotti a Capitale Protetto per i quali tale confronto non risulta rilevante.

La variabile **Vola_h**, anch'essa presentata in precedenza, denota i certificates caratterizzati da sottostanti per i quali, storicamente, è stata osservata un'elevata volatilità.

La variabile **CDS_Stress**, di tipo dummy, assume valore pari a 1 nei periodi successivi a un incremento del livello di CDS a 5 anni dell'emittente. Nello specifico, la variabile assume valore pari a 1 qualora si osservi un aumento delle quotazioni dei credit default swap di almeno 20 punti base nell'arco di 30 giorni rispetto al livello registrato 30 giorni prima. A partire da tale evento, la variabile rimane pari a 1 fintantoché le quotazioni dello stesso si mantengono su livelli superiori rispetto a quelli pre-shock. Tale stato, per costruzione, persiste per un massimo di 60 giorni.

$$\text{CDS_Stress} = \mathbf{1} \left(\max_{s \in [t-60, t]} \text{CDS}_s - \text{CDS}_{s-30} \geq 20 \wedge \text{CDS}_t \geq \text{CDS}_{s-30} \right) \quad (128)$$

⁸⁶ Come soluzione tattica, si assume che tutti i sottostanti mantengano lo stesso dividend yield $\text{DivYield}_{\text{ann}}$ anche negli anni successivi. I dividendi attesi risultano quindi pari al tasso di dividendo annuo per il numero di anni a scadenza T .

⁸⁷ Tali pesi vengono ricalcolati su base quotidiana

⁸⁸ Rispetto al prezzo di settlement del sottostante rilevato nel momento di emissione del certificato.

Tale regressore viene considerato per 6 dei 12 emittenti in perimetro in quanto, per i restanti, non risulta disponibile la serie storica dei Credit Default Swap. Nella tabella seguente sono riportati i segni attesi per ciascun regressore, in accordo con le previsioni teoriche e le principali evidenze empiriche disponibili.

Tabella 4.10 – Segni attesi, razionali e riferimenti bibliografici dei regressori considerati nell'analisi del markup

Regressore	Segno atteso	Razionale	Altri riferimenti
<i>Risk</i>	(+)	Un maggior rischio dello strumento implica costi di hedging più elevati e maggiore opacità nella valutazione dei potenziali outcome favorendo l'applicazione di markup maggiori.	N/a – regressore introdotto nel corso della presente analisi
<i>Risk</i> ²	(+/-)	Test di non linearità del rischio (<i>effetti non noti</i>): un coefficiente negativo indica relazione concava, uno positivo segnala incremento più che proporzionale dei margini a livelli estremi di rischio.	N/a – regressore introdotto nel corso della presente analisi
<i>DivYield_p</i>	(+)	Si assume che gli emittenti non riconoscano integralmente agli investitori i dividendi erogati dai diversi sottostanti	Szymanowska, Ter Horst, Veld, 2009 (n.s.) Entrop et al., 2016 (+) Entrop, Fischer, 2020 (+) Hernández, et al., 2007 (+)
<i>logMktCap</i>	(-)	Una maggiore capitalizzazione dei sottostanti, si crede essere funzionale alla riduzione dei costi di copertura favorendo il contenimento del markup	Hernández, et al., 2007 (dis. qualitativa) Henderson e Pearson, 2011 (-)
<i>Multi</i>	(+)	Una maggiore complessità nella struttura del prodotto, si immagina essere funzionale all'applicazione di markup maggiori da parte degli emittenti	Célrier e Vallée, 2017 (+) Stoimenov e Wilkens, 2005 (+)
<i>Lifetime</i>	(-)	In coerenza con la Life Cycle Hypothesis, osservata nei paragrafi precedenti anche in riferimento al mercato italiano, ci si aspetta che prodotti prossimi alla scadenza siano caratterizzati da markup inferiori	Baule, 2011 (-) Stoimenov e Wilkens, 2005 (-) Wilkens, Erner e Röder, 2003 (-)
<i>TTM</i>	(+)	Una maggiore vita residua è associata a un markup più elevato sia per l'incremento dell'incertezza intertemporale, sia perché i costi, espressi in forma annualizzata nei documenti informativi (KID) si cumulano su un orizzonte più lungo, determinando un maggiore onere rispetto ad un mercato privo di frizioni.	Baule, 2011 (+) Entrop et al., 2016 (+) Jørgensen et al., 2011 (+) Schertler, 2016 (+)
<i>Safe</i>	(-)	Una maggiore distanza del sottostante dalla barriera di protezione riduce l'incertezza circa il rimborso a scadenza, semplificando la valutazione del payoff atteso e attenuando l'opacità dello strumento, che tende ad assumere caratteristiche più assimilabili a quelle di un'obbligazione plain vanilla.	Entrop et al., 2016 (-) Entrop, Fischer, 2020 (-) ⁸⁹ Schertler, 2016 (-)
<i>Vola_b</i>	(+)	Come osservato nei precedenti paragrafi in merito all'analisi nel momento di emissione, l'elevata volatilità implica maggiori costi di hedging e minore trasparenza valutativa, favorendo l'applicazione di markup più elevati	Szymanowska, Ter Horst, Veld, 2009 (+) Entrop et al., 2016 (+) Henderson e Pearson, 2011 (+) Gabaix e Laibson, 2006 (+) Entrop, Fischer, 2020 (+)
<i>CDS_{Stress}</i>	(- / <i>n.s.</i>)	Verifica di possibili relazioni tra il rischio di credito dell'emittente ed il prezzo di mercato del prodotto (<i>effetti non noti</i>). In un mercato efficiente, un aumento del rischio di credito dell'emittente dovrebbe riflettersi in una compressione del prezzo dello strumento (riduzione della differenza tra il prezzo di mercato ed il fair price stimato ⁹⁰). La non significatività indicherebbe una mancata incorporazione nel prezzo del rischio emittente	N/a – regressore introdotto nel corso della presente analisi

⁸⁹ La citazione di Entrop et al., 2016 e Entrop, Fischer, 2020 è motivata dal fatto che la variabile Safe è costruita a partire dal concetto di moneyness proposto in tali studi

⁹⁰ Si precisa che il fair value stimato, è determinato in un framework risk free che non incorpora il rischio di credito dell'emittente.

Viene per questo stimata, separatamente per ciascun emittente, la seguente regressione i cui risultati vengono presentati nella **Tabella 4.11**:

$$\Pi_{i,t} = \alpha + \beta_1 Risk_{i,t} + \beta_2 Risk_{i,t}^2 + \beta_3 DivYield_{p,i,t} + \beta_4 logMktCap_{i,t} + \beta_5 Multi_i + \beta_6 Lifetime_{i,t} + \beta_7 TTM_{i,t} + \beta_8 Vola_h_i + \beta_9 Safe_{i,t} + \beta_{10} CDS_Stress_t + \varepsilon_{i,t}$$

Tabella 4.11 – Risultati regressione – Variabile dipendente, Markup $\Pi_{i,t}$, Standard error Cluster robust

Emittente	Const.	Risk	Risk ²	DivYield	logMktCap	Multi	Lifetime	TTM	Vola_h	Safe	CDS_Stress	Adj. R ²	RMSE	N
Banca Akros	2.87*** (0.18)	0.95*** (0.15)	0.21*** (0.06)	0.10*** (0.02)	-0.21* (0.12)	0.00 (0.52)	-5.79*** (0.76)	-1.68*** (0.27)	2.32*** (0.55)	-0.76*** (0.14)	-0.37*** (0.06)	0.762	0.99	1890
BNP Paribas	9.76*** (0.61)	3.34*** (0.16)	0.27*** (0.06)	0.09** (0.04)	0.00 (0.10)	-2.47*** (0.72)	-3.09*** (1.04)	-1.16*** (0.27)	0.44 (0.40)	-0.65*** (0.20)	-0.10 (0.38)	0.582	2.21	3200
Citigroup	6.21** (2.89)	4.04*** (0.72)	0.73*** (0.16)	-0.39** (0.15)	0.77 (0.76)	1.54 (4.17)	-0.27 (2.75)	1.22* (0.61)	-8.34** (2.93)	-0.30 (0.58)	-0.43 (0.24)	0.724	2.60	292
Goldman Sachs	5.70*** (0.18)	0.80*** (0.04)	0.24*** (0.02)	0.03*** (0.01)	-0.33*** (0.07)	2.21*** (0.30)	-11.5 *** (0.66)	-2.67*** (0.22)	1.39*** (0.36)	-0.19 (0.19)	-0.36*** (0.06)	0.789	0.57	1544
Intesa Sanpaolo	-0.32** (0.11)	0.62*** (0.06)	0.16*** (0.03)	0.00 (0.01)	0.12 (0.07)	2.48*** (0.36)	-0.78 (0.64)	0.00 (0.10)	0.66* (0.33)	-0.24* (0.13)	—	0.325	0.57	1124
Leonteq	5.72*** (0.60)	2.65*** (0.17)	0.46*** (0.07)	0.06 (0.06)	-0.07 (0.17)	2.17*** (0.61)	-1.44 (1.56)	-0.94** (0.46)	1.15* (0.69)	-2.15*** (0.32)	—	0.767	1.88	1145
Marex	7.64*** (0.67)	2.57*** (0.18)	0.39*** (0.05)	-0.02 (0.04)	-0.47*** (0.15)	1.77** (0.77)	-7.93*** (1.68)	-2.65*** (0.43)	2.84*** (0.91)	-0.53* (0.31)	—	0.786	2.09	2058
Mediobanca	0.85** (0.39)	0.86*** (0.10)	0.35*** (0.03)	-0.02 (0.01)	0.44*** (0.09)	0.83** (0.32)	-6.03*** (0.94)	-0.74*** (0.17)	1.67*** (0.35)	-0.45** (0.20)	-0.22** (0.10)	0.818	0.83	1582
Natixis	9.07*** (1.58)	2.67*** (0.32)	-0.18 (0.15)	0.04 (0.08)	-1.09** (0.42)	4.07*** (1.12)	-3.27 (4.39)	-1.93*** (0.51)	5.44** (2.00)	-3.70*** (1.04)	—	0.769	1.87	597
Soc. Générale	7.14*** (0.07)	1.13*** (0.05)	-0.18*** (0.03)	0.07*** (0.02)	-0.73*** (0.06)	—	-2.74*** (0.59)	-0.16 (0.30)	1.81*** (0.52)	-1.11*** (0.14)	—	0.669	1.00	6006
Unicredit	6.51*** (0.23)	2.43*** (0.11)	0.29*** (0.05)	0.05* (0.03)	0.04 (0.05)	0.33 (0.53)	-6.14*** (0.60)	-2.00*** (0.32)	1.73*** (0.31)	-0.59*** (0.16)	-0.11 (0.17)	0.691	1.68	5005
Vontobel	14.0 *** (0.35)	5.37*** (0.28)	0.88*** (0.13)	0.06 (0.07)	-0.20 (0.12)	—	-7.51*** (1.34)	-3.27*** (0.45)	1.86*** (0.65)	-1.15*** (0.30)	—	0.651	2.86	2774

Le variabili di rischio, rappresentate dal termine lineare **Risk** e dalla sua componente quadratica **Risk²**, risultano complessivamente altamente significative per la totalità degli emittenti analizzati. Il coefficiente lineare è sempre positivo e significativo al 1%, indicando come, all'aumentare del livello dell'indicatore sintetico di rischio, il markup dello strumento tende ad aumentare.

Si evince inoltre la presenza di una relazione non lineare tra rischio e markup evidenziando come, per 10 dei 12 emittenti in analisi, la positività del coefficiente di riferimento evidenzia la convessità della funzione di rischio, con un incremento dei costi impliciti più che proporzionale per livelli elevati di rischio. Solo nel caso di Société Générale (-0,18***) la componente quadratica assume segno negativo, suggerendo una dinamica di pricing marginalmente meno penalizzante ai livelli estremi di rischio. Nel solo caso di Natixis, al contrario, il termine quadratico non risulta significativo al 10%.

La variabile **DivYield_p** evidenzia un impatto generalmente significativo sul markup applicato dagli emittenti. Nella quasi totalità dei casi si evidenzia come un maggiore flusso atteso di dividendi si traduca in un incremento dei costi impliciti incorporati nel prezzo del certificato. Mediamente, un incremento del dividend yield dei sottostanti compresi nei diversi certificati dell'1% si traduce in maggiori costi impliciti approssimativamente compresi tra lo 0,05% e lo 0,1%.

L'unico caso discordante è rappresentato da Citigroup (-0,39**) in cui si evidenzia un coefficiente negativo e significativo ($p < 0,05$). Il risultato appare pienamente coerente con la letteratura (Entrop et al., 2016; Entrop, Fischer, 2020; Hernández et al., 2007) in cui si evidenzia come i dividendi riconosciuti dai sottostanti non vengono trasferiti agli investitori sotto forma di prezzi più favorevoli ma, al contrario, vengono trattenuti dagli emittenti come componente di margine implicito.

Con riferimento alla variabile *logMktCap* rappresentativa della capitalizzazione di mercato dei sottostanti, i risultati evidenziano una relazione significativa per diversi emittenti, generalmente di segno negativo, suggerendo che, certificati aventi come sottostante società a maggiore capitalizzazione, tendano sistematicamente ad incorporare costi impliciti inferiori. Tale evidenza, probabilmente dovuta alla maggiore efficienza dell'attività di hedging dell'emittente, risulta pienamente coerente con i risultati di Henderson e Pearson, 2011. Tale dinamica risulta di particolare rilievo nel caso di Société Générale, risulta significativa al 1% anche nei casi di Goldman Sachs e Marex, marginalmente significativa per altri 2 emittenti mentre un segno opposto ($p < 0,01$) è evidente in riferimento ai prodotti emessi da Mediobanca.

Le variabili *Lifetime* e *TTM* presentano entrambe coefficiente negativo e significativo per la quasi totalità degli emittenti. Letti congiuntamente, i due regressori convergono nel descrivere una compressione del markup all'approssimarsi della scadenza, in linea con la Life Cycle Hypothesis Baule, 2011; Wilkens et al., 2003. Il segno negativo di TTM (minore markup per scadenze più lunghe), apparentemente contrario alle attese teoriche, compensa in parte l'effetto della variabile *Lifetime* in modo particolare in fase di emissione del prodotto senza però invalidare l'effetto complessivo atteso. La velocità e la forma di tale compressione dipendono dal peso relativo dei due coefficienti: per emittenti con rapporto $|\beta_{Lifetime}|/|\beta_{TTM}|$ ⁹¹ elevato come nel caso di Mediobanca (8,1) e Société Générale (17,1) la compressione del markup lungo la vita dello strumento risulta particolarmente evidente. Al contrario, per emittenti con rapporto più contenuto come Natixis (1,7) e Leonteq (1,5) il contributo di TTM prevale su quello di Lifetime, non evidenziando una graduale compressione del markup nel corso del ciclo di vita dello strumento, in linea con quanto già riscontrato nell'analisi dedicata le cui risultanze sono presentate in *Tabella 4.4* e *Tabella 4.5*.

La *Figura A.03*, presentata in *Annex*, illustra la decomposizione dei due effetti per ciascun emittente.

[FIGURA A.03]

La variabile dummy *Multi*, che identifica i certificati con più di un sottostante, presenta un coefficiente positivo e significativo per la maggioranza degli emittenti, confermando come la maggiore complessità strutturale dei prodotti multiasset si traduca in costi impliciti più elevati. Tale evidenza, in linea con quanto documentato da Stoimenov e Wilkens, 2005 risulta particolarmente netta nei casi di Natixis (4,07***), Intesa Sanpaolo (2,48***), e Goldman Sachs (2,21***), mentre non vi sono evidenze di questo

⁹¹ Il rapporto $|\beta_{Lifetime}|/|\beta_{TTM}|$ rappresenta, da un punto di vista teorico, la durata soglia T^* (in anni) al di sotto della quale, per prodotti con durata naturale all'emissione $T < T^*$, il markup risulta, in media, decrescente lungo l'intera vita del prodotto, confermando la Life Cycle Hypothesis.

nei prodotti emessi da Banca Akros, Citigroup e Unicredit. Si evidenzia un unico caso contrario, rappresentato da BNP Paribas, in cui prodotti caratterizzati da più sottostanti sembrano incorporare un markup mediamente inferiore del 2,47% rispetto a prodotti dalle stesse caratteristiche ma con un solo sottostante. Tale stima risulta significativa al livello dell'1%. Tale stima non risulta disponibile nel caso di Vontobel (in quanto tutti i prodotti in perimetro sono caratterizzati da un numero minimo di 3 sottostanti) così come per Société Générale in cui tutti i 266 prodotti considerati, emessi dall'emittente francese, comprendono ognuno un solo sottostante.

La variabile **Vola_h**, che identifica i certificati con sottostanti ad alta volatilità storica, conferma nel mercato secondario l'evidenza già riscontrata all'emissione: il coefficiente risulta positivo e significativo per 11 dei 12 emittenti in perimetro, indicando come i prodotti con sottostanti più volatili incorporino sistematicamente costi impliciti più elevati anche nella fase di negoziazione successiva all'emissione. Tale persistenza suggerisce che i maggiori costi di copertura e la minore trasparenza informativa associati a sottostanti volatili non si esauriscano al momento del collocamento ma si riflettano stabilmente anche nelle fasi in cui il prodotto viene negoziato nel mercato secondario rafforzando le evidenze documentate in [Entrop et al., 2016](#) e [Baule, 2011](#).

La variabile **Safe** risulta negativa per la totalità degli emittenti, confermando come i certificati con il sottostante quotato a distanza superiore al 60% dalla barriera di protezione del capitale a scadenza incorporino sistematicamente costi impliciti inferiori. Tale evidenza è coerente con l'interpretazione economica proposta da [Baule, 2011](#) ed [Entrop et al., 2016](#) i quali sottolineano come una maggiore distanza dalla barriera riduce la sensitività della componente opzionale alla volatilità, rendendo il payoff atteso più deterministico e lo strumento più trasparente e assimilabile a un'obbligazione plain-vanilla ([Viganò et al., 2019](#)). Il coefficiente risulta significativo per 10 dei 12 emittenti analizzati, con l'unica eccezione rappresentata da Goldman Sachs e Citigroup per i quali la distanza dalla barriera non costituisce un determinante statisticamente rilevante del pricing secondario. In riferimento agli emittenti per cui tale effetto risulta significativo al livello dell'1% si evidenzia come tale condizione si traduca in minori costi impliciti talvolta anche di notevole entità come nel caso di Natixis (-3,7% ***), Leonteq (-2,15% ***), Vontobel (-1,15 % ***), Société Générale (-1,11% ***), Banca Akros (-0,76% ***), BNP Paribas (-0,65 % ***).

La variabile **CDS_{Stress}** presenta segno negativo per la totalità dei sei emittenti per i quali è disponibile la serie storica dei Credit Default Swap suggerendo come periodi di stress sul rischio di credito dell'emittente sembrino associarsi a una riduzione del markup nel mercato secondario, coerentemente con l'ipotesi di una parziale incorporazione del rischio emittente nel pricing. Tuttavia, tale evidenza risulta statisticamente significativa solo per Banca Akros (-0,37% ***), Goldman Sachs (-0,36% ***), e Mediobanca (-0,22% **), mentre per BNP Paribas, Citigroup e Unicredit il coefficiente associato, seppur negativo, non risulta significativo al 10%.

Al fine di facilitare il confronto tra i segni dei regressori in riferimento a ciascun emittente e regressore considerato, nonché la significatività degli stessi, di seguito si riporta una heatmap riepilogativa.

Figura 4.6– *Determinanti Markup per emittente, segno coefficienti e significatività - Standard error Cluster robust*⁹²

	Risk	Risk ²	DivYield	logMktCap	Multi	Lifetime	TTM	Vola_h	Safe	CDS_Stress
BANCAAKROS	***	***	***	*		***	***	***	***	***
BNPPARIBAS	***	***	**		***	***	***		***	
CITIGROUP	***	***	**				*	**		
GOLDMANSACHS	***	***	***	***	***	***	***	***		***
INTESASANPAOLO	***	***			***			*	*	
LEONTIEQ	***	***			***		**	*	***	
MAREX	***	***		***	**	***	***	***	*	
MEDIOBANCA	***	***		***	**	***	***	***	**	**
NATIXIS	***			**	***		***	**	***	
SOCIETEGENERALE	***	***	***	***		***		***	***	
UNICREDIT	***	***	*			***	***	***	***	
VONTOBEL	***	***				***	***	***	***	

4.5. Relazione tra Markup e rendimento atteso

Dopo aver analizzato l'ampiezza del markup all'emissione, la sua evoluzione durante il ciclo di vita dei prodotti e le determinanti della sua variabilità tra emittenti e strutture, l'analisi si concentra ora sulla ricerca di eventuali relazioni tra il markup osservato e i rendimenti futuri dei certificati. L'ipotesi di fondo, richiamata anche in [Henderson e Pearson, 2011](#), è che un markup più elevato, se correttamente rilevato, si traduca, a parità di struttura e profilo di rischio, in rendimenti futuri inferiori, rendendo quindi rilevante, anche da un punto di vista operativo, la corretta identificazione dell'entità di tale componente di costo. Sulla base di tale intuizione, si propone un approccio cross-sectional finalizzato a testare come il markup osservato sia in grado di spiegare differenze sistematiche nei rendimenti futuri risk-adjusted degli investment certificates.

Metodologia analisi

Per valutare empiricamente il potere predittivo del markup, si utilizza una metodologia di portfolio sorting basata su un approccio a rolling window. Per ciascuna data t , a partire dal 1° settembre 2023, si

⁹² Il colore delle celle rappresenta il segno del coefficiente stimato (rosso per i segni positivi e significativi, blu per le stime negative e significative, panna per le rilevazioni non statisticamente significative). Gli asterischi (*, **, ***) denotano significatività statistica rispettivamente ai livelli del 10%, 5% e 1%. Le celle bianche indicano variabili non stimabili per il relativo emittente.

considera il sottogruppo di certificati negoziati lungo l'intero periodo⁹³ della rolling window $\mathcal{W}_t$ $[t, t + L]$ con $L = 12$ mesi. Tale sottogruppo di prodotti $\mathcal{U}_t$ viene ordinato in base al markup osservato in t al fine di identificare due portafogli distinti ed equipesati⁹⁴ che vengono costituiti selezionando i primi e gli ultimi $N = 20$ certificati da tale ranking. Il portafoglio Ptf_t^{over} comprende gli N certificati con i markup più elevati, mentre il portafoglio Ptf_t^{under} comprende gli N certificati con i markup più bassi.

Il rendimento dei portafogli $r_{Ptf_t^{over}}$ e $r_{Ptf_t^{under}}$ lungo la finestra $\mathcal{W}_t$ si ottiene equiponderando i rendimenti logaritmici giornalieri storicamente osservati dei singoli certificati compresi nel portafoglio:

$$r_{Ptf_t^{over}}(\tau) = \frac{1}{N} \sum_{i \in Ptf_t^{over}} r_i(\tau), \quad r_{Ptf_t^{under}}(\tau) = \frac{1}{N} \sum_{i \in Ptf_t^{under}} r_i(\tau), \tau \in \mathcal{W}_t$$

dove $r_i(\tau)$ indica il rendimento logaritmico giornaliero storicamente osservato, comprensivo di reinvestimento delle cedole, del certificato i al giorno $\tau \in [t + 1, t + L]$.

Questo approccio consente di ottenere l'intera serie storica dei rendimenti giornalieri del portafoglio lungo la finestra $\mathcal{W}_t$, dalla quale è possibile derivare sia il rendimento cumulato complessivo:

$$R_{Ptf_t^{over/under}}(t + L) = \sum_{\tau=t+1}^{t+L} r_{Ptf_t^{over/under}}(\tau)$$

rappresentativo dell'intero periodo L , sia altre metriche di rischio basate sulla distribuzione dei rendimenti giornalieri.

La procedura di selezione viene replicata giornalmente incrementando la data di costituzione t di un giorno lavorativo. Per ciascuna data t , i portafogli Ptf_t^{over} e Ptf_t^{under} vengono ricostituiti sulla base del ranking del markup aggiornato in riferimento alla stessa data, considerando il nuovo set di prodotti “investibili” $\mathcal{U}_t$ definito dai certificati negoziati nella nuova rolling window $\mathcal{W}_t = [t, t + L]$. Questo genera una sequenza di K portafogli overlapping lungo l'intero periodo di analisi, che si conclude con il portafoglio relativo alla rolling window che termina il 19 giugno 2025 in quanto tale data risulta rappresentativa dell'ultima rilevazione storica disponibile.

Nel caso in cui il Markup rilevato a valle dell'applicazione del framework presentato fosse in grado di catturare gli effettivi maggiori costi impliciti dello strumento, ci si aspetta di osservare delle metriche risk adjusted stabilmente migliori per il portafoglio Ptf_t^{under} rispetto al portafoglio costruito con prodotti meno efficienti. Al fine di valutare in modo completo la performance dei portafogli costruiti, si adotta un insieme di misure di rendimento e rischio ideato al fine di catturare diverse dimensioni della performance risk-adjusted.

⁹³ Eventuali gap nei dati dei prezzi dei certificati storicamente osservati non superiori a 5 giorni consecutivi rilevati nel periodo che intercorre tra t e $t + L$ vengono colmati mediante interpolazione lineare. I prodotti per cui non si rileva un prezzo per periodi più prolungati vengono esclusi da $\mathcal{U}_t$.

⁹⁴ Poiché i prodotti selezionati in Ptf_t^{under} e Ptf_t^{over} presentano prezzi in t potenzialmente molto diversi, il rendimento del portafoglio nel periodo di riferimento risulta ottenibile equiponderando i rendimenti di ciascun prodotto registrati a partire dal giorno t .

Le metriche considerate

Per ciascuno dei K portafogli Ptf_t^{over} e Ptf_t^{under} , il rendimento annualizzato è stimato moltiplicando il rendimento logaritmico medio giornaliero per il numero convenzionale di giorni di borsa aperti nell'anno:

$$\mu_{ann} = 252 \cdot \bar{r}_{Ptf_t^{over/under}}$$

dove $\bar{r} = \frac{1}{L} \sum_{\tau=t+1}^{t+L} r_{Ptf_t^{over/under}}(\tau)$ indica la media dei rendimenti logaritmici giornalieri osservati nella finestra $\mathcal{W}_t$.

La **volatilità annualizzata** è calcolata come:

$$\sigma_{ann} = \sqrt{252} \cdot \sigma(r_{Ptf_t^{over/under}}(\tau))$$

Lo **Sharpe Ratio** è definito a partire dagli excess return giornalieri rispetto al tasso risk free r_f , stimato come $r_{f,daily} = r_{f,ann}/252$:

$$\text{Sharpe Ratio} = \frac{\sqrt{252} \cdot (r - r_f)}{\sigma(r - r_f)}$$

L'**indice di Sortino** sostituisce la volatilità totale con la deviazione standard dei soli excess return negativi σ_{ann}^- :

$$\sigma_{ann}^- = \sqrt{252} \cdot \sigma((r(\tau) - r_f) \mid r(\tau) - r_f < 0)$$

$$\text{Indice di Sortino} = \frac{252 \cdot (r - r_f)}{\sigma_{ann}^-}$$

Il **massimo drawdown** è calcolato sull'indice di prezzo normalizzato $I(\tau) = \exp(\sum_{s=t+1}^{\tau} r(s))$, dove s indica i giorni di borsa compresi nell'intervallo $[t+1, \tau]$, come la massima perdita percentuale dal picco precedente registrata nella finestra $\mathcal{W}_t$:

$$\text{MaxDrawdown} = \max_{\tau \in [t, t+L]} \left(\frac{\max_{s \leq \tau} I(s) - I(\tau)}{\max_{s \leq \tau} I(s)} \right)$$

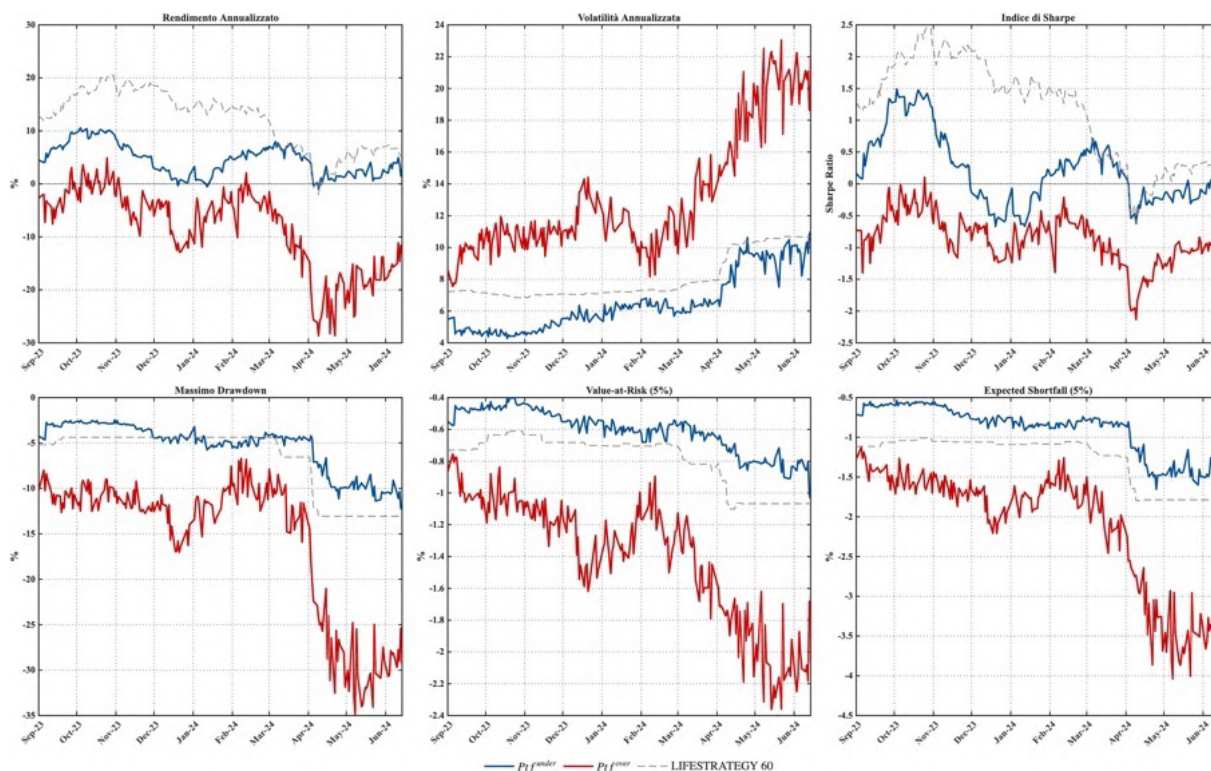
Infine, il rischio di coda dei rendimenti giornalieri è misurato tramite il **Value at Risk VaR_{5%}** e l'**Expected Shortfall ES_{5%}**, entrambi al livello $\alpha = 5\%$.

Evidenze riscontrate:

La **Figura 4.7** illustra l'evoluzione rolling delle principali metriche di performance dei portafogli Ptf^{under} e Ptf^{over} lungo l'intero periodo di analisi, confrontate con il benchmark rappresentato dall'ETF

Vanguard LifeStrategy 60% Equity (*LIFE60*) rappresentativo di un portafoglio composto per il 60% da azioni globali e per il 40% da obbligazioni globali investment grade⁹⁵.

Figura 4.7 –Evoluzione rolling metriche rischio, – Rolling window 1 anno, $N = 20$ - Ptf^{under} e Ptf^{over} , *LIFE60*



Dall'analisi della **Figura 4.7** emerge in maniera particolarmente evidente come il Ptf^{under} rappresentato da certificati dal basso markup domini stocasticamente il Ptf^{over} lungo l'intero periodo di analisi. Pur a fronte di una minor volatilità, Value at Risk ed Expected Shortfall riesce a garantire rendimenti sempre superiori a quelli offerti da Ptf^{over} . Il confronto con il benchmark *LIFE60* permette di osservare una delle caratteristiche più apprezzate degli investment certificates: sebbene nei periodi di crescita del mercato azionario (data di inizio della rolling window antecedente ad aprile 2024⁹⁶) questi non rappresentino lo strumento a posteriori ideale, riescono a garantire rendimenti positivi anche nei periodi di mercato laterale e moderatamente ribassista.

L'evidenza qualitativa emersa trova conferma formale nell'analisi inferenziale riportata in **Tabella 4.12**, che presenta le statistiche descrittive medie e i risultati dei test di significatività sul differenziale $\Delta Ptf = Ptf^{under} - Ptf^{over}$ per ciascuna metrica considerata. Data la natura overlapping dei portafogli costruiti, l'inferenza viene condotta tramite standard error Newey-West, robusto alla correlazione, con lag pari al

⁹⁵ Il confronto con il portafoglio LIFE60 è utilizzato esclusivamente quale riferimento comparativo al fine di fornire un termine di paragone in termini di profilo rischio-rendimento. A parere di chi scrive, i due strumenti (portafoglio diversificato con componenti azionarie/obbligazionarie e certificates) non possono proporsi come soluzioni alternative ma complementari.

⁹⁶ I portafogli con data di inizio della rolling window successiva a tale ricorrenza incorporano gli effetti della contrazione che ha interessato i mercati azionari globali a partire dal mese di aprile 2025.

numero di portafogli considerati, al fine di correggere la correlazione seriale indotta dalla sovrapposizione delle osservazioni consecutive garantendo delle statistiche più conservative.

Tabella 4.12 – *Rischio e Rendimento dei portafogli Ptf^{under} e Ptf^{over} – Rolling window 1 anno, $N = 20$, standard error Newey-West*

Metrica	Ptf^{under}	Ptf^{over}	ΔPtf	SE_{NW}	t -stat	p -val	% Over Wins
Rendimento							
Rend. annualizzato (%)	4.62	-8.43	13.05 ***	1.7671	7.384	0.000	0.0%
Rendimento risk-adjusted							
Indice di Sharpe	0.23	-0.86	1.10 ***	0.0643	17.038	0.000	0.0%
Indice di Sortino	0.40	-1.12	1.52 ***	0.1442	10.545	0.000	0.0%
Rischio							
Volatilità annualizzata (%)	6.49	13.19	-6.70 ***	0.6404	-10.458	0.000	0.0%
Massimo Drawdown (%)	-5.41	-15.85	10.44 ***	1.5201	6.867	0.000	0.0%
VaR _{5%} (%)	-0.61	-1.40	0.79 ***	0.0881	9.011	0.000	0.0%
ES _{5%} (%)	-0.90	-2.12	1.21 ***	0.1489	8.150	0.000	0.0%

Anche prendendo in considerazione questo, i risultati mostrano come il differenziale risulti statisticamente significativo al livello dell'1% per la totalità delle metriche considerate. Sul fronte dei rendimenti, Ptf^{under} registra un rendimento annualizzato medio del 4,62% contro il -8,43% di Ptf^{over} , con uno spread di 13,05 punti percentuali ($t = 7,38$). Il vantaggio risulta ancor più netto in termini risk-adjusted: lo Sharpe ratio medio è pari a 0,23 per Ptf^{under} contro -0,86 per Ptf^{over} ($\Delta = 1,10\%$, $t = 17,04$). Sul fronte del rischio, la volatilità annualizzata di Ptf^{under} è pari alla metà di quella di Ptf^{over} (6,49% vs 13,19%), mentre il massimo drawdown medio risulta di circa 10 punti percentuali più contenuto. La colonna %Over Wins, pari a zero per tutte le metriche, sottolinea come Ptf^{under} abbia dominato Ptf^{over} nella totalità dei portafogli analizzati.

L'evidenza documentata potrebbe tuttavia riflettere, almeno in parte, un effetto di composizione. Nel corso delle analisi è risultato evidente come esista una relazione positiva e statisticamente significativa tra il livello di rischio del certificato e l'entità del markup incorporato nel prezzo.

Analisi per classe di rischio:

Al fine di confrontare portafogli accomunati da un livello di rischio comune, l'analisi viene replicata separatamente per ciascuna classe di rischio individuata, costruendo i portafogli Ptf^{under} e Ptf^{over} individuando i certificati all'interno di gruppi con profilo di rischio comparabile nella giornata di selezione. A tal fine si prevedono tre classi di rischio individuate sulla base dell'indicatore sintetico di rischio $\mathfrak{R}_t$ presentato. La prima comprende i certificati a rischio basso (livelli $\mathfrak{R}_t$ 1-2), la seconda quelli a rischio medio (livelli $\mathfrak{R}_t$ 3-5) e la terza classe dagli strumenti caratterizzati da un elevato rischio di mercato (livelli $\mathfrak{R}_t$ 6-7).

Tabella 4.13 – Rischio e Rendimento dei portafogli Ptf^{under} e Ptf^{over} – Rolling window 1 anno, $N = 20$ – vista per classe di rischio⁹⁷

Metrica	Rischio Basso (1-2)					Rischio Medio (3-5)					Rischio Elevato (6-7)				
	Ptf^{under}	Ptf^{over}	ΔPtf	p-value	% Over Wins	Ptf^{under}	Ptf^{over}	ΔPtf	p-value	% Over Wins	Ptf^{under}	Ptf^{over}	ΔPtf	p-value	% Over Wins
Rendimento															
Rendimento annuo (%)	5.45	5.51	-0.05 (0.4615)	0.544	44.3%	3.25	-4.43	7.68*** (0.5822)	0.000	0.0%	-3.01	-8.64	5.62*** (0.4592)	0.000	11.5%
Indicatori Risk-Adjusted															
Indice di Sharpe	0.37	0.33	0.04 (0.0920)	0.318	40.6%	0.23	-0.59	0.82*** (0.1571)	0.000	1.0%	-0.53	-0.86	0.33*** (0.0348)	0.000	11.5%
Indice di Sortino	0.59	0.42	0.17 (0.1395)	0.117	38.0%	0.37	-0.75	1.12*** (0.2287)	0.000	2.1%	-0.71	-1.11	0.40*** (0.0767)	0.000	20.3%
Misure di Rischio															
Volatilità annua (%)	5.61	5.97	-0.36*** (0.1249)	0.002	31.8%	6.51	12.15	-5.65*** (0.0676)	0.000	0.0%	11.78	13.53	-1.75*** (0.6393)	0.004	26.9%
Massimo Drawdown (%)	-4.22	-4.70	0.47*** (0.1180)	0.000	35.4%	-6.01	-12.82	6.82*** (0.4778)	0.000	0.5%	-11.08	-16.35	5.27*** (0.6791)	0.000	3.8%
VaR 5% (%)	-0.52	-0.61	0.09*** (0.0147)	0.000	21.9%	-0.64	-1.26	0.62*** (0.0202)	0.000	1.5%	-1.23	-1.44	0.20*** (0.0550)	0.000	25.3%
ES 5% (%)	-0.76	-0.89	0.13*** (0.0097)	0.000	18.8%	-1.02	-1.91	0.89*** (0.0136)	0.000	0.0%	-1.77	-2.17	0.40*** (0.1248)	0.001	19.8%
N. Ptf validi (giornate analisi)															
					192										

I risultati dell'analisi per classe di rischio confermano e precisano l'evidenza emersa a livello aggregato. Per la classe a rischio medio e quella ad alto rischio, Ptf^{under} domina Ptf^{over} su tutte le metriche considerate, con differenziali statisticamente significativi all'1% sia sul fronte del rendimento che del rischio. Il quadro si differenzia per la classe a rischio basso, dove il differenziale di rendimento risulta non significativo: Ptf^{under} e Ptf^{over} conseguono rendimenti medi sostanzialmente analoghi (5,45% vs 5,51%), mentre il vantaggio di Ptf^{under} si concentra esclusivamente sulle metriche di rischio, tutte significative all'1%. Questo si traduce in un vantaggio risk-adjusted solo marginalmente significativo come segnalato dall'Indice di Sortino che registra uno spread di 0,17 (p-value = 0,117).

Risulta inoltre utile condividere una breve osservazione in merito ai rendimenti attesi che, pur in un periodo generalmente positivo per i mercati azionari mondiali segnalano dei rendimenti decrescenti (e talvolta marcatamente negativi) all'aumentare del livello di rischio. Tale evidenza è tuttavia influenzata dalla presenza di un marcato selection bias nel perimetro dei certificati considerati, che limita la possibilità di trarre conclusioni robuste in termini di confronto dei rendimenti con altri strumenti. L'analisi, come già richiamato, è infatti circoscritta ai prodotti negoziati nella giornata del 19 giugno 2025. Di conseguenza, molti certificati emessi negli anni precedenti, i cui sottostanti hanno registrato performance particolarmente positive, non risultano inclusi nel campione in quanto richiamati anticipatamente dagli emittenti attraverso il meccanismo di Autocall. Da questo deriva inoltre la maggior performance di prodotti a basso rischio in quanto, tipicamente, gran parte di prodotti a capitale protetto non prevede tale clausola. Si ritiene comunque che tale aspetto non sia tale da invalidare l'analisi in quanto l'obiettivo del presente elaborato non è quello di effettuare confronti con altri asset finanziari.

⁹⁷ L'indicazione “numero portafogli validi (giornate di analisi)” presente in tabella fa riferimento al numero di finestre rolling per cui l'universo dei prodotti investibili U_t , in riferimento alla configurazione in esame, è risultata essere superiore a 40 prodotti consentendo così di selezionarne 20 per ciascuno dei due portafogli considerati

Analisi per struttura:

A supporto di ciò, si propone un'ulteriore vista per tipologia di struttura funzionale a cogliere se le evidenze riscontrate suddividendo i prodotti tra classi di rischio vengano confermate anche costruendo portafogli accomunati dalla stessa tipologia di struttura.

Tabella 4.14 – Rischio e Rendimento dei portafogli Ptf^{under} e Ptf^{over} , $N = 20$ – vista per struttura di payoff⁹⁸

	Capitale Protetto					Cash Collect					Maxi Cedola					Altro Cap. Condizionato				
Metrica	Ptf ^{under}	Ptf ^{over}	Δ Ptf	p-value	Over Wins	Ptf ^{under}	Ptf ^{over}	Δ Ptf	p-value	Over Wins	Ptf ^{under}	Ptf ^{over}	Δ Ptf	p-value	Over Wins	Ptf ^{under}	Ptf ^{over}	Δ Ptf	p-value	Over Wins
Rendimento																				
Rendimento annuo (%)	7.29	5.86	1.43*** (0.4281)	0.001	28.9%	6.24	-5.27	11.51*** (2.0347)	0.000	0.0%	2.09	-4.34	6.43*** (0.4986)	0.000	8.5%	-2.33	-7.30	4.97*** (0.2472)	0.000	7.5%
Indicatori Risk-Adjusted																				
Indice di Sharpe	0.66	0.46	0.20*** (0.0766)	0.004	34.7%	0.68	-0.56	1.23*** (0.1081)	0.000	0.0%	-0.09	-0.65	0.56*** (0.0972)	0.000	9.6%	-0.70	-0.84	0.14*** (0.0102)	0.000	30.2%
Indice di Sortino	1.05	0.62	0.43*** (0.1085)	0.000	28.4%	1.04	-0.70	1.74*** (0.2141)	0.000	0.0%	-0.09	-0.87	0.78*** (0.1477)	0.000	9.6%	-0.86	-1.06	0.21*** (0.0137)	0.000	26.4%
Misure di Rischio																				
Volatilità annua (%)	5.79	4.86	0.93 (0.1002)	1.000	90.5%	5.46	13.42	-7.96*** (0.7013)	0.000	0.0%	7.07	12.11	-5.05*** (0.5006)	0.000	3.2%	8.33	13.51	-5.18*** (0.4176)	0.000	3.8%
Massimo Drawdown (%)	-4.14	-3.55	-0.59 (0.2910)	0.977	69.5%	-4.57	-14.77	10.20*** (1.8517)	0.000	0.0%	-6.57	-13.06	6.49*** (0.6839)	0.000	8.0%	-10.10	-17.39	7.29*** (0.6336)	0.000	0.0%
VaR 5% (%)	-0.53	-0.48	-0.05 (0.0059)	1.000	78.9%	-0.55	-1.40	0.85*** (0.0780)	0.000	0.0%	-0.68	-1.30	0.62*** (0.0413)	0.000	4.8%	-0.86	-1.42	0.56*** (0.0309)	0.000	0.0%
ES 5% (%)	-0.77	-0.73	-0.04 (0.0110)	1.000	68.4%	-0.81	-2.12	1.31*** (0.1564)	0.000	0.0%	-1.07	-1.89	0.83*** (0.0748)	0.000	4.8%	-1.39	-2.23	0.84*** (0.0574)	0.000	1.9%
Statistiche																				
R _t medio	Ptf ^{under} : 1.29 Ptf ^{over} : 2.32					Ptf ^{under} : 2.10 Ptf ^{over} : 5.95					Ptf ^{under} : 2.71 Ptf ^{over} : 5.92					Ptf ^{under} : 2.05 Ptf ^{over} : 4.16				
N. Ptf validi (giornate di analisi)	190					195					188					53				

L'analisi per tipologia strutturale conferma la robustezza dell'evidenza aggregata, con Ptf^{under} che domina Ptf^{over} su rendimento e metriche risk-adjusted in tutte e quattro le strutture considerate. Il caso più eclatante è rappresentato dai prodotti Cash Collect, dove il differenziale di rendimento annualizzato raggiunge 11,51 punti percentuali ($t = 5,66$) con la volatilità di Ptf^{over} più che doppia rispetto a quella di Ptf^{under} (13,42% vs 5,46%). Un riscontro anomalo è rilevabile nel caso dei prodotti a capitale Protetto che, pur registrando differenziali di rendimento significativi a favore di Ptf^{under} , le metriche di rischio si invertono, con Ptf^{over} che presenta volatilità, drawdown, VaR ed Expected Shortfall strutturalmente più contenuti. Nonostante questo, sia l'indice di Sharpe come l'indice di Sortino risultano significativamente (p-value < 0,01) più virtuosi, anche in questo caso, in riferimento ai prodotti per i quali vengono stimati minori costi impliciti. Anche l'indicatore sintetico di rischio $\mathcal{R}_t$ medio rilevato nel momento in cui il certificate viene incuso all'interno del portafoglio di riferimento, conferma le ipotesi sopra descritte nonché riflette le caratteristiche intrinseche delle diverse strutture in esame.

Al fine di rafforzare la robustezza dei risultati e fornire evidenza che le conclusioni raggiunte non siano frutto di *cherry picking* nella scelta dei parametri di costruzione del portafoglio, l'analisi viene estesa a un insieme più ampio di configurazioni alternative. In particolare, oltre alla configurazione di riferimento fin qui presentata (20 asset per ciascun portafoglio e finestra rolling di 12 mesi), vengono considerate tre dimensioni di portafoglio alternative (15, 20 e 30 asset) e tre orizzonti temporali (9, 12 e 18 mesi),

⁹⁸ Il riferimento al livello di rischio medio per ciascun portafoglio presente in tabella si riferisce all'indicatore sintetico di rischio di mercato, rilevato al momento di inclusione del certificate nel portafoglio.

per un totale di nove combinazioni. Per ciascuna configurazione, l'analisi è replicata sia a livello aggregato, sia separatamente per le tre classi di rischio (Basso, Medio e Alto), generando complessivamente 36 specificazioni. I risultati, sintetizzati nella **Tabella A.04**, evidenziano come quanto documentato nelle sezioni risulta confermarsi anche al variare dei parametri di costruzione, confermando la solidità delle conclusioni raggiunte.

[TABELLA A.04]

Analisi per emittente:

In conclusione, può risultare informativo fornire una panoramica degli emittenti maggiormente rappresentati nei diversi portafogli per classe di rischio, al fine di verificare se emergano pattern sistematici riconducibili a una ricorrenza costante dei prodotti di determinati intermediari nel portafoglio “virtuoso” oppure in quello caratterizzato da maggiori costi impliciti e, conseguentemente, da minori rendimenti attesi.

Per ciascun emittente si definiscono le seguenti grandezze aggregate considerando l'intero periodo di analisi:

- N_i^{Under} : numero totale di certificati selezionati nel portafoglio underpriced;
- N_i^{Over} : numero totale di certificati selezionati nel portafoglio overpriced;
- $N_i^{Available}$: totale di prodotti dell'emittente inclusi nel set di prodotti “investibili” U_t ;
- $N_i^{Selected} = N_i^{Under} + N_i^{Over}$: numero complessivo di selezioni.

Sulla base di tali quantità vengono calcolate le seguenti metriche:

Percentuale condizionata alla selezione

$$\%Sel_i^{Under} = \frac{N_i^{Over}}{N_i^{Selected}} \times 100, \quad \%Sel_i^{Over} = \frac{N_i^{Under}}{N_i^{Selected}} \times 100$$

Misurano la distribuzione delle selezioni tra portafoglio underpriced e overpriced, condizionatamente al fatto che la selezione sia avvenuta.

Net Score

$$\text{Net Score}_i = \frac{N_i^{Under} - N_i^{Over}}{N_i^{Selected}} \times 100$$

Misura la propensione relativa dell'emittente a comparire nel portafoglio underpriced piuttosto che in quello overpriced, condizionatamente alla selezione. Tale score, per costruzione, assume valori compresi tra -100 e +100.

Tasso di selezione

$$TS_i^{Under} = \frac{N_i^{Under}}{N_i^{Available}} \times 100, \quad TS_i^{Over} = \frac{N_i^{Over}}{N_i^{Available}} \times 100$$

Indica l'intensità con cui i certificati dell'emittente vengono selezionati rispetto al set di prodotti "investibili" $\mathcal{U}_t$.

Numero portafogli

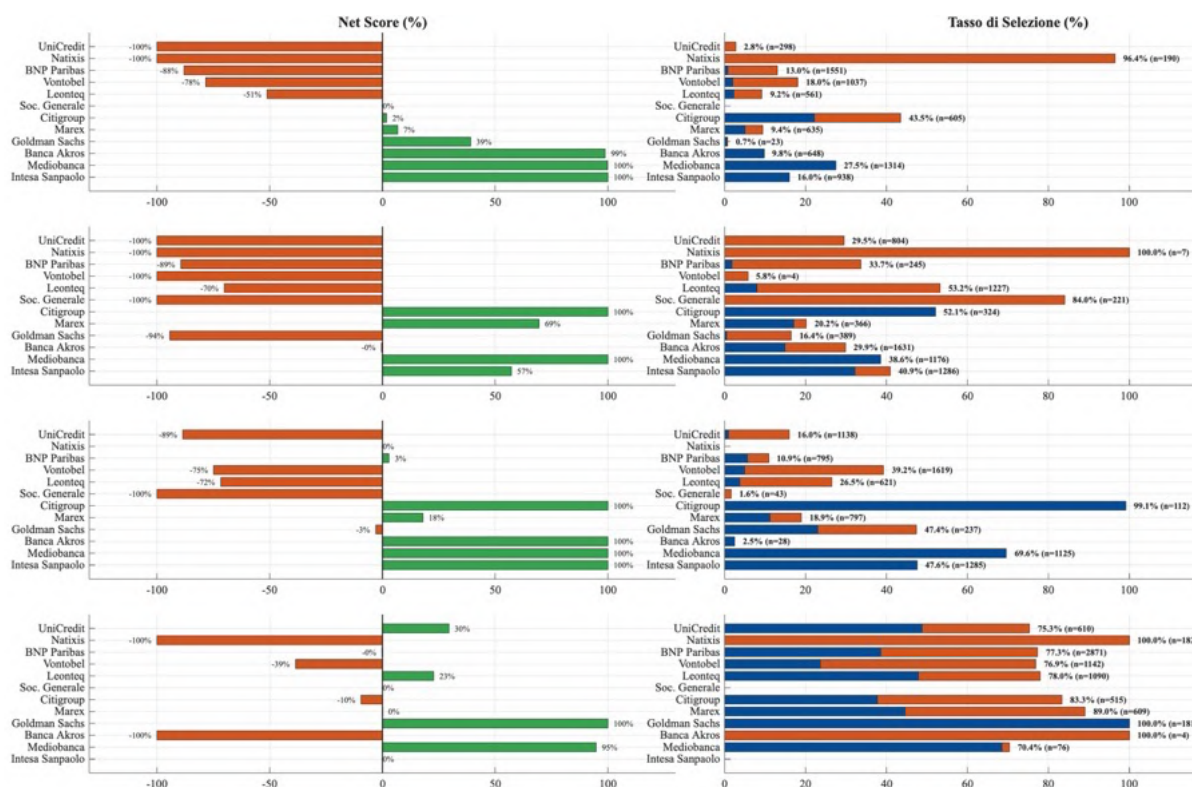
Numero di giornate in cui almeno un certificato dell'emittente è stato selezionato in uno dei due portafogli.

Tabella 4.15 - Analisi inclusione prodotti emessi dai diversi emittenti nei portafogli Ptf^{under} e Ptf^{over} : ranking per classe di rischio

Classe	Emittente	N_{i}^{Assil}	N_{i}^{Set}	N_{i}^{Under}	N_{i}^{Over}	$\%Set_{i}^{Under}(\%)$	$\%Set_{i}^{Over}(\%)$	Net Score	$TS_{i}^{Under}(\%)$	$TS_{i}^{Over}(\%)$	N_{ptf}
Tutti i Prodotti	Intesa Sanpaolo	5,858	938	938	0	100.00	0.00	100.00	16.01	0.00	195
	Mediobanca	4,779	1,314	1,313	1	99.92	0.08	99.85	27.47	0.02	192
	Banca Akros	6,619	648	644	4	99.38	0.62	98.77	9.73	0.06	195
	Goldman Sachs	3,087	23	16	7	69.57	30.43	39.13	0.52	0.23	8
	Marx	6,739	635	339	296	53.39	46.61	6.77	5.03	4.39	195
	Citigroup	1,391	605	308	297	50.91	49.09	1.82	22.14	21.35	195
	Soc. Générale	2,923	0	0	0	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0
	Leonteq	6,114	561	137	424	24.42	75.58	-51.16	2.24	6.93	195
	Vontobel	5,746	1,037	112	925	10.80	89.20	-78.40	1.95	16.10	195
	BNP Paribas	11,891	1,551	93	1,458	6.00	94.00	-88.01	0.78	12.26	195
	Natixis	197	190	0	190	0.00	100.00	-100.00	0.00	96.45	190
	UniCredit	10,692	298	0	298	0.00	100.00	-100.00	0.00	2.79	171
Rischio Basso (1-2)	Citigroup	622	324	324	0	100.00	0.00	100.00	52.09	0.00	192
	Mediobanca	3,049	1,176	1,176	0	100.00	0.00	100.00	38.57	0.00	190
	Marx	1,816	366	310	56	84.70	15.30	69.40	17.07	3.08	183
	Intesa Sanpaolo	3,141	1,286	1,011	275	78.62	21.38	57.23	32.19	8.76	192
	Banca Akros	5,461	1,631	812	819	49.79	50.21	-0.43	14.87	15.00	192
	Leonteq	2,305	1,227	183	1,044	14.91	85.09	-70.17	7.94	45.29	192
	BNP Paribas	728	245	13	232	5.31	94.69	-89.39	1.79	31.87	114
	Goldman Sachs	2,366	389	11	378	2.83	97.17	-94.34	0.46	15.98	119
	Natixis	7	7	0	7	0.00	100.00	-100.00	0.00	100.00	7
	Soc. Générale	263	221	0	221	0.00	100.00	-100.00	0.00	84.03	62
	UniCredit	2,726	804	0	804	0.00	100.00	-100.00	0.00	29.49	192
Rischio Medio (3-5)	Vontobel	69	4	0	4	0.00	100.00	-100.00	0.00	5.80	4
	Banca Akros	1,140	28	28	0	100.00	0.00	100.00	2.46	0.00	27
	Citigroup	113	112	112	0	100.00	0.00	100.00	99.12	0.00	112
	Intesa Sanpaolo	2,702	1,285	1,285	0	100.00	0.00	100.00	47.56	0.00	195
	Mediobanca	1,617	1,125	1,125	0	100.00	0.00	100.00	69.57	0.00	195
	Marx	4,208	797	470	327	58.97	41.03	17.94	11.17	7.77	195
	BNP Paribas	7,287	795	409	386	51.45	48.55	2.89	5.61	5.30	195
	Natixis	0	0	0	0	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0
	Goldman Sachs	500	237	115	122	48.52	51.48	-2.95	23.00	24.40	128
	Leonteq	2,344	621	88	533	14.17	85.83	-71.66	3.75	22.74	194
	Vontobel	4,125	1,619	203	1,416	12.54	87.46	-74.92	4.92	34.33	195
Rischio Elevato (6-7)	UniCredit	7,119	1,138	65	1,073	5.71	94.29	-88.58	0.91	15.07	195
	Soc. Générale	2,660	43	0	43	0.00	100.00	-100.00	0.00	1.62	33
	Goldman Sachs	181	181	181	0	100.00	0.00	100.00	100.00	0.00	181
	Mediobanca	108	76	74	2	97.37	2.63	94.74	68.52	1.85	69
	UniCredit	810	610	395	215	64.75	35.25	29.51	48.77	26.54	181
	Leonteq	1,398	1,090	669	421	61.38	38.62	22.75	47.85	30.11	182
	Marx	684	609	305	304	50.08	49.92	0.16	44.59	44.44	182
	Intesa Sanpaolo	0	0	0	0	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0
	Soc. Générale	0	0	0	0	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0
	BNP Paribas	3,714	2,871	1,432	1,439	49.88	50.12	-0.24	38.56	38.75	182
	Citigroup	618	515	233	282	45.24	54.76	-9.51	37.70	45.63	182
Rischio Elevato (6-7)	Vontobel	1,486	1,142	351	791	30.74	69.26	-38.53	23.62	53.23	182
	Banca Akros	4	4	0	4	0.00	100.00	-100.00	0.00	100.00	4
	Natixis	182	182	0	182	0.00	100.00	-100.00	0.00	100.00	182

L'analisi per emittente rivela pattern sistematici persistenti caratterizzati da una marcata eterogeneità nel comportamento di pricing tra gli intermediari considerati. A livello aggregato, emergono due gruppi nettamente distinti: da un lato Intesa Sanpaolo, Mediobanca e Banca Akros, con Net Score prossimi o pari a +100, selezionati quasi esclusivamente nel portafoglio Ptf^{under} in tutte le classi di rischio mentre, al contrario, Unicredit, BNP Paribas e Natixis, sistematicamente presenti in portafoglio Ptf^{over} con Net Score compresi tra -88 e -100. Tale polarizzazione, come mostrato anche graficamente nella **Figura 4.8**, persiste con notevole stabilità al variare della classe di rischio. Un'eccezione è rappresentata da Goldman Sachs che presenta un Net Score moderatamente positivo a livello aggregato (+39), ma mostra una forte polarizzazione tra i segmenti di rischio. In particolare, il Net Score è pari a +100 nel segmento ad alto rischio con selezione esclusiva dei certificati nel portafoglio Ptf^{under} , mentre nel segmento a basso rischio l'emittente è associato in maniera pressoché prevalente al portafoglio Ptf^{over} (Net Score = -94).

Figura 4.8 – Net Score e Tasso di Selezione (%) per emittente e classe di rischio⁹⁹



Nel complesso, i risultati confermano l'esistenza di emittenti strutturalmente virtuosi (Intesa Sanpaolo, Mediobanca e Banca Akros mantengono Net Score elevati e tassi di selezione in Pt^{funder} stabilmente superiori al 78% in tutte le classi di rischio) e di emittenti sistematicamente associati a costi impliciti elevati tra cui Unicredit, BNP Paribas e Natixis, il cui tasso di selezione in Pt^{fover} supera il 90% indipendentemente dalla classe di rischio considerata.

4.6 Possibili limiti metodologici

In questa fase appare opportuno evidenziare alcuni dei possibili limiti emersi nell'analisi condotta che, pur non invalidando i risultati ottenuti, meritano di essere considerati ai fini di una corretta interpretazione degli stessi. Come già evidenziato, è opportuno ricordare che il modello di pricing adottato non incorpora il rischio di default dell'emittente. Il prezzo del prodotto viene determinato attualizzando i flussi di cassa simulati, assumendo implicitamente che non sussista il rischio che l'intermediario non sia in grado di adempiere integralmente ai propri impegni contrattuali. Pur riconoscendo che, così facendo, il markup rilevato risulterà sistematicamente inferiore rispetto a quello che emergerebbe includendo un premio per il rischio di credito dell'emittente, non si è ritenuto

⁹⁹ Dall'alto verso il basso vengono rappresentati portafogli filtrati per classi di rischio crescenti. Rispettivamente: l'intera popolazione di titoli, i prodotti caratterizzati da un rischio basso ($\mathcal{R}_t$ 1-2), rischio medio ($\mathcal{R}_t$ 3-5) e rischio alto ($\mathcal{R}_t$ 6-7). Nel panel di destra (tasso di selezione) la quota relativa alla selezione nel portafoglio underpriced è rappresentata in colore blu. In rosso, la quota relativa alla selezione nel portafoglio overpriced.

opportuno introdurre ulteriori elementi di complessità nel modello, anche in considerazione dell'elevato standing creditizio degli emittenti analizzati. Si tratta, in ogni caso, di un'approssimazione di entità contenuta, coerente con un'impostazione frequentemente adottata in letteratura (Henderson e Pearson, 2011; Stoimenov e Wilkens, 2005; Viganò et al., 2019). Per di più, l'attualizzazione dei flussi di cassa è condotta applicando un unico tasso risk free indipendentemente dalla scadenza residua dei singoli flussi, senza prendere in considerazione l'intera struttura a termine dei tassi di interesse. Un ulteriore limite riguarda la precisione delle stime Monte Carlo, influenzata dal numero relativamente contenuto di iterazioni adottate nella fase di pricing. In particolare, la limitazione a 200 iterazioni per le simulazioni impiegate nella valutazione giornaliera dei certificates è stata dettata da vincoli computazionali. Come illustrato nel **Paragrafo 3.7.3**, un numero così ridotto di simulazioni comporta un errore standard stimato prossimo al 3%, rappresentando probabilmente la principale fonte di incertezza nelle stime. Sul fronte della stima della volatilità, la scelta di ricorrere a un Volatility Ensemble costruito a partire dalle serie storiche dei prezzi dei sottostanti, non si fonda su un framework accademicamente consolidato. Tale scelta, in larga parte guidata da un approccio di tipo tattico legato all'indisponibilità dei dati relativi al mercato delle opzioni e, ove disponibili, all'elevato bid-ask spread riscontrabile in particolare per i contratti e le scadenze caratterizzati da un limitato open interest, risulta calibrata sulla base di un approccio puramente expert judgemental. L'approccio presenta un interessante potenziale per l'analisi e la valutazione degli investment certificates, in quanto consente di approssimare le principali caratteristiche della volatility surface a partire dalle sole serie storiche dei sottostanti. Tuttavia, la sua piena validazione richiede ulteriori analisi teoriche ed empiriche volte a consolidarne la solidità metodologica.

Infine, si segnala come l'analisi di portfolio sorting non consideri lo spread denaro lettera né le commissioni di acquisto. Come già spiegato, l'obiettivo di tale analisi non è la quantificazione della performance assoluta storicamente realizzata dai portafogli considerati, bensì la verifica di differenze sistematiche tra le performance risk-adjusted degli stessi spiegabili dai differenti markup.

4.7 Possibili sviluppi della ricerca

I limiti evidenziati, unitamente alle evidenze emerse nel corso dell'analisi, aprono diverse direzioni per futuri approfondimenti. In primo luogo, la disponibilità di dati relativi ai volumi di acquisto e vendita consentirebbe di testare in modo più robusto la Order Flow Hypothesis. Il mercato italiano, grazie alle peculiarità del regime tributario che incentiva l'utilizzo dei certificati Maxi Cedola ai fini della compensazione delle minusvalenze, genera flussi di negoziazione prevedibili e concentrati in finestre temporali ben identificabili, configurandosi come un contesto ideale per lo studio empirico di tale ipotesi. Un'ulteriore estensione dell'analisi potrebbe riguardare la definizione di un perimetro di certificates non soggetto al selection bias che caratterizza il campione considerato nel presente elaborato. I 1235 certificati considerati corrispondono infatti ai prodotti negoziati alla data del 19 giugno 2025, con

la conseguente esclusione di tutti gli strumenti emessi negli anni precedenti e già richiamati anticipatamente a seguito dell'attivazione del meccanismo di Autocall. Ne deriva che il campione risulta sbilanciato verso prodotti i cui sottostanti hanno registrato performance negative o laterali, mentre non sono rappresentati i certificati per i quali l'andamento favorevole dei sottostanti ha determinato il rimborso anticipato. Tale peculiarità, la cui elaborazione non risulta possibile ricorrendo ai soli dati disponibili nella piattaforma *Refinitiv Eikon* di *LSEG Data & Analytics*, consentirebbe di estendere l'analisi a confronti sistemici con altre asset class e di valutare con maggiore precisione l'opportunità di includere stabilmente gli investment certificates all'interno di un portafoglio diversificato.

Un possibile ulteriore filone di ricerca riguarda l'analisi della selezione dei sottostanti da parte degli emittenti. Oltre all'evidenza già documentata in letteratura relativa alla preferenza per titoli caratterizzati da elevato dividend yield ([Hernández, Lee e Liu, 2007](#)), potrebbe risultare rilevante esaminare se gli emittenti tendano a strutturare certificati su sottostanti che si trovano in una fase di forte momentum o che beneficino di elevata attenzione mediatica. In tali circostanze, la selezione dei sottostanti, guidata prevalentemente da considerazioni di marketing, potrebbe tradursi in rendimenti attesi corretti per il rischio inferiori rispetto a quelli associati a titoli mediaticamente meno discussi.

Conclusioni

Nel corso del presente elaborato è stata condotta la prima analisi empirica sistematica del mercato italiano degli investment certificates, applicando un modello di pricing basato sul Metodo Monte Carlo a un campione di 1235 prodotti emessi da 12 intermediari attivi nel mercato italiano e negoziati tra il 2020 e il 2025, generando una base dati di oltre 373'000 confronti giornalieri tra il valore teorico stimato e il prezzo di mercato osservato. L'approccio simulativo adottato, oltre a permettere una stima quotidiana del markup dello strumento, ha inoltre consentito di derivare delle metriche di rischio di mercato aggiornate quotidianamente lungo l'intero ciclo di vita del prodotto, funzionali a rappresentare una proposta di un nuovo indicatore di sintesi del rischio di mercato del prodotto alternativo rispetto all'indicatore attualmente previsto dalla normativa PRIIPs, con l'obiettivo di offrire all'investitore una rappresentazione dinamica del profilo di rischio del certificate capace di evolvere in risposta alle condizioni di mercato.

Il markup medio all'emissione rilevato sul campione si attesta al 6,02% (3,37% il markup annualizzato), un valore in linea con quanto documentato nei mercati nord-europei ma sensibilmente superiore alle evidenze disponibili per il mercato tedesco nei primi anni duemila. Tale dato aggregato cela tuttavia una marcata eterogeneità nelle politiche di pricing tra intermediari, che persiste anche depurando i dati dal diverso profilo di rischio, dalla struttura di payoff e dalla volatilità dei sottostanti. La dispersione tra emittenti supera i cinque punti percentuali con i prodotti emessi da Vontobel che registrano il markup più elevato (7,75%), seguiti da Marex e Natixis, mentre all'estremo opposto si collocano i prodotti emessi da Citigroup (2,46%), Intesa Sanpaolo (3,26%) e Mediobanca (3,03%).

Tali differenze tendono a persistere nelle successive fasi in cui il certificate viene scambiato nel mercato secondario. La compressione dei margini, coerente con la Life Cycle Hypothesis confermata per otto degli undici emittenti analizzati, non avviene in modo lineare: tanto il markup quanto il markup annualizzato appaiono ridursi in modo più marcato nella seconda parte del ciclo di vita, in prossimità della scadenza.

L'analisi comparativa tra certificati Maxi Cedola e Cash Collect, strutturalmente equivalenti dal punto di vista del payoff a scadenza, non evidenzia la presenza di un sovrapprezzo sistematico all'emissione, contrariamente a quanto documentato da [Baule, 2011](#) per il mercato tedesco, dove gli emittenti risultano appropriarsi di una quota del vantaggio fiscale attraverso l'applicazione di un markup addizionale sui prodotti fiscalmente più efficienti. Nel mercato italiano, il vantaggio tributario riconosciuto all'investitore non sembrerebbe essere catturato dall'intermediario attraverso politiche di pricing differenziate al momento del collocamento. Al contrario, una differenza emerge nelle fasi successive all'erogazione della cedola: il markup dei certificati Maxi Cedola risulta significativamente più contenuto,

seppur con significatività marginale ($p < 0,1$), nell'intervallo temporale immediatamente successivo all'incasso della cedola stessa, fase in cui si concentra presumibilmente la maggiore pressione in vendita da parte degli investitori che hanno acquistato il prodotto con l'obiettivo primario di compensare le minusvalenze pregresse. Tale evidenza parrebbe coerente con la Order Flow Hypothesis di [Wilkins, Erner e Röder, 2003](#) secondo cui emittenti e market maker adottano un comportamento strategico nella determinazione dei prezzi in risposta alla composizione attesa dei flussi di acquisto e vendita. La natura controversa di tale ipotesi in letteratura suggerisce tuttavia cautela nell'interpretazione dei risultati, che necessitano di ulteriori conferme e di analisi capaci di considerare anche i volumi di acquisti e vendite registrate.

L'analisi econometrica delle determinanti del markup restituisce un quadro coerente con l'ipotesi che i costi impliciti riflettano in larga misura l'incertezza associata all'attività di copertura dell'emittente: prodotti scritti su sottostanti ad alta volatilità, a bassa capitalizzazione e con un profilo di rischio più elevato incorporano sistematicamente markup più alti. Tale evidenza sembra suggerire che una quota rilevante del markup presente negli investment certificates non rappresenti una rendita di posizione dell'intermediario, ma la remunerazione di un'attività di hedging genuinamente più onerosa e soggetta a maggiore incertezza. Al contrario, l'inclusione di sottostanti ad alto dividend yield sembra rappresentare un elemento che concorre a definire una fonte di profitto sistematica per l'emittente: l'effetto positivo e generalizzato di tale variabile sui costi impliciti, coerentemente con quanto documentato dalla letteratura internazionale, suggerisce come i flussi cedolari distribuiti dai sottostanti vengano trattenuti dall'intermediario concorrendo a rappresentare una componente di margine nell'ambito della propria attività di intermediazione. I coefficienti associati alle variabili Lifetime e TTM (time to maturity) confermano la presenza di una relazione negativa tra markup e vita residua del prodotto, coerentemente con la Life Cycle Hypothesis documentata nella sezione precedente. Il rischio di credito dell'emittente mostra invece un impatto solo parziale e non generalizzato, suggerendo che tale componente non venga sistematicamente incorporata nel pricing e che il mercato secondario dei certificates non rifletta in modo efficiente le variazioni nel merito creditizio degli intermediari emittenti. È inoltre riscontrabile, seppur il tema necessiti di ulteriori approfondimenti, una relazione tra il rischio di credito dell'emittente ed il prezzo a cui vengono negoziati i prodotti da questo emessi, suggerendo che il mercato secondario incorpori almeno parzialmente le variazioni nel merito creditizio degli intermediari nel pricing degli strumenti. Al contrario, dal confronto tra emittenti non emerge in alcun modo la presenza di un premio per il rischio a favore degli intermediari di minori dimensioni o privi di rating rispetto alle primarie banche continentali, che in taluni casi sembrerebbero anzi caratterizzarsi da markup inferiori, anche assumendo tutti gli emittenti come privi di rischio di credito ai fini del pricing.

L'evidenza più rilevante ed innovativa emerge infine dall'analisi di portfolio sorting. I portafogli costruiti individuando i titoli caratterizzati dal minor markup registrano stabilmente delle metriche risk-adjusted migliori rispetto agli stessi portafogli costituiti da titoli per cui è stato rilevato, nel momento di selezione,

i maggiori costi impliciti. Tale risultanza viene confermata anche al variare del numero di titoli compresi nei due portafogli, della lunghezza della rolling window considerata e considerando titoli caratterizzati da profili di payoff comuni nonché dalla stessa classe di rischio. Nella quasi totalità dei casi, il portafoglio a basso markup domina stocasticamente quello ad alto markup in riferimento a tutte le metriche di rischio e di rendimento considerate.

Bibliografia

- Aït-Sahalia, Y., & Jacod, J. (2009). Testing for jumps in a discretely observed process. *Annals of Statistics*, 37(1), 184-222.
- Akaike, H. (1973). Information theory and an extension of the maximum likelihood principle. In B. N. Petrov & F. Csáki (Eds.), *Proceedings of the 2nd International Symposium on Information Theory* (pp. 267-281). Budapest: Akadémiai Kiadó.
- Andersen, T. G., Bollerslev, T., Diebold, F. X., & Labys, P. (2001). The distribution of realized exchange rate volatility. *Journal of the American Statistical Association*, 96(453), 42-55.
- Andersen, T. G., Bollerslev, T., Christoffersen, P. F., & Diebold, F. X. (2006). Volatility and correlation forecasting. In G. Elliott, C. W. J. Granger, & A. Timmermann (Eds.), *Handbook of Economic Forecasting* (Vol. 1, pp. 777-878). Amsterdam: North-Holland.
- Arellano, M. (1987). Computing robust standard errors for within-groups estimators. *Oxford Bulletin of Economics and Statistics*, 49(4), 431-434.
- Baule, R., Entrop, O., & Wilkens, M. (2008). Credit risk and bank margins in structured financial products: Evidence from the German secondary market for discount certificates. *Journal of Futures Markets*, 28(4), 376-397.
- Baule, R. (2011). The order flow of discount certificates and issuer pricing behavior. *Journal of Banking & Finance*, 35(11), 3120-3133.
- Baule, R., & Tallau, C. (2011). The pricing of path-dependent structured financial retail products: The case of bonus certificates. *Journal of Derivatives*, 18(4), 54-71.
- Barndorff-Nielsen, O. E., & Shephard, N. (2006). Econometrics of testing for jumps in financial economics using bipower variation. *Journal of Financial Econometrics*, 4(1), 1-30.
- Bates, D. S. (2000). Post-'87 crash fears in the S&P 500 futures option market. *Review of Financial Studies*, 13(2), 343-383.
- Beaton, A. E., & Tukey, J. W. (1974). The fitting of power series, meaning polynomials, illustrated on band-spectroscopic data. *Technometrics*, 16(2), 147-185.
- Beber, A., & Erzegovesi, L. (1999). Distribuzioni di probabilità implicite nei prezzi delle opzioni. *Alca Tech Reports 008*, Dipartimento di informatica e studi aziendali, Università di Trento.
- Bekaert, G., & Wu, G. (2000). Asymmetric volatility and risk in equity markets. *Review of Financial Studies*, 13(1), 1-42.
- Black, F. (1976). Studies of stock price volatility changes. In *Proceedings of the 1976 Meetings of the American Statistical Association, Business and Economic Statistics Section*, 177-181.
- Black, F., & Scholes, M. (1973). The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy*, 81(3), 637-654.

- Bottaso, A., Fusaro, M., Giribone, P. G., & Tissone, A. (2023). An advanced Monte Carlo method for forward-start options pricing. *Risks*, 11(10), 172.
- Bollerslev, T. (1986). Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. *Journal of Econometrics*, 31(3), 307-327.
- Bollerslev, T., Tauchen, G., & Zhou, H. (2009). Expected stock returns and variance risk premia. *Review of Financial Studies*, 22(11), 4463-4492.
- Borsi, G. (2025). I certificati di investimento: La guida strategica per l'investitore evoluto. *Hoepli*, Milano
- Boyle, P. P. (1977). Options: A Monte Carlo approach. *Journal of Financial Economics*, 4(3), 323-338.
- Brewer, C. A., & Pickles, J. (2002). Evaluation of methods for classifying epidemiological data on choropleth maps in series. *Annals of the Association of American Geographers*, 92(4), 662-681.
- Baubonis, C., Gastineau, G. L., & Purcell, D. (1993). The banker's guide to equity-linked certificates of deposit. *Journal of Derivatives*, 1(2), 87-95.
- Caflish, R. E. (1998). Monte Carlo and quasi-Monte Carlo methods. *Acta Numerica*, 7, 1-49.
- Broadie, M., & Glasserman, P. (1997). Pricing American-style securities using simulation. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 21(8-9), 1323-1352.
- Burth, S., Kraus, T., & Wohwend, H. (2001). The pricing of structured products in the Swiss market. *Journal of Derivatives*, 9(2), 30-40.
- C  lerier, C., & Vallée, B. (2017). Catering to investors through security design: Headline rate and complexity. *Quarterly Journal of Economics*, 132(3), 1469-1508.
- Cox, J. C., Ross, S. A., & Rubinstein, M. (1979). Option pricing: A simplified approach. *Journal of Financial Economics*, 7(3), 229-263.
- Christie, A. A. (1982). The stochastic behavior of common stock variances: Value, leverage and interest rate effects. *Journal of Financial Economics*, 10(4), 407-432.
- Christie, A. A. (1992). Equity volatility. In J. B. Bicksler (Ed.), *The Economics of Financial Markets* (pp. 55-91). Oxford: Oxford University Press.
- Chatterjee, S., & Hadi, A. S. (2006). *Regression Analysis by Example* (4th ed.). Hoboken, NJ: Wiley.
- Cochrane, D., & Orcutt, G. H. (1949). Application of least squares regression to relationships containing auto-correlated error terms. *Journal of the American Statistical Association*, 44(245), 32-61.
- Cook, R. D. (1977). Detection of influential observation in linear regression. *Technometrics*, 19(1), 15-18.
- Durbin, J., & Watson, G. S. (1950). Testing for serial correlation in least squares regression. I. *Biometrika*, 37(3-4), 409-428.
- Durbin, J., & Watson, G. S. (1951). Testing for serial correlation in least squares regression. II. *Biometrika*, 38(1-2), 159-178.
- Duffie, D., Pan, J., & Singleton, K. (2000). Transform analysis and asset pricing for affine jump-diffusions. *Econometrica*, 68(6), 1343-1376.

- Dumas, B., Fleming, J., & Whaley, R. E. (1998). Implied volatility functions: Empirical tests. *Journal of Finance*, 53(6), 2059-2106.
- Dufays, A., Jacobs, K., Liu, Y., & Rombouts, J. (2024). Fast filtering with large option panels: Implications for asset pricing. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 59(7), 3416-3447.
- Engle, R. F., & Ng, V. K. (1993). Measuring and testing the impact of news on volatility. *Journal of Finance*, 48(5), 1749-1778.
- Eraker, B., Johannes, M., & Polson, N. (2003). The impact of jumps in volatility and returns. *Journal of Finance*, 58(3), 1269-1300.
- Engle, R. (2002). Dynamic conditional correlation: A simple class of multivariate generalized autoregressive conditional heteroskedasticity models. *Journal of Business & Economic Statistics*, 20(3), 339-350.
- Engle, R. F., & Patton, A. J. (2001). What good is a volatility model? *Quantitative Finance*, 1(2), 237-245.
- Entrop, O., Schober, A., & Wilkens, M. (2013). The pricing policy of banks for exchange-traded leverage certificates: Interday and intraday effects. Working Paper.
- Entrop, O., McKenzie, M., Wilkens, M., & Winkler, C. (2016). The performance of individual investors in structured financial products. *Review of Quantitative Finance and Accounting*, 46(3), 569-604.
- Entrop, O., & Fischer, G. (2020). Hedging costs and joint determinants of premiums and spreads in structured financial products. *Journal of Futures Markets*, 40(7), 1049-1071.
- Fisher, W. D. (1958). On grouping for maximum homogeneity. *Journal of the American Statistical Association*, 53(284), 789-798.
- Gabaix, X., & Laibson, D. (2006). Shrouded attributes, consumer myopia, and information suppression in competitive markets. *Quarterly Journal of Economics*, 121(2), 505-540.
- Glasserman, P. (2004). Monte Carlo Methods in Financial Engineering. *New York: Springer*.
- Guidolin, M., Leonetti, E., & Pedio, M. (2024). Can retail investors benefit from complex structured products? The answer from a rational expectations approach. *Journal of Banking & Finance*, 160, 107079.
- Hamilton, J. D. (1994). Time series analysis. *Princeton, NJ: Princeton University Press*.
- Harrison, J. M., & Pliska, S. R. (1981). Martingales and stochastic integrals in the theory of continuous trading. *Stochastic Processes and their Applications*, 11(3), 215-260.
- Hartigan, J. A., & Wong, M. A. (1979). Algorithm AS 136: A K-means clustering algorithm. *Applied Statistics*, 28(1), 100-108.
- Henderson, B. J., & Pearson, N. D. (2011). The dark side of financial innovation: A case study of the pricing of a retail financial product. *Journal of Financial Economics*, 100(2), 227-247.
- Hens, T., & Rieger, M. O. (2014). Can utility optimization explain the demand for structured investment products? *Quantitative Finance*, 14(4), 673-681.

- Heston, S. L. (1993). A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options. *Review of Financial Studies*, 6(2), 327-343.
- Hernandez, R., Lee, W. Y., & Liu, P. (2007). The market and the pricing of outperformance certificates. Working Paper, University of Arkansas.
- Hernandez, R., Lee, W. Y., Liu, P., & Dai, T.-S. (2013). Outperformance certificates: Analysis, pricing, interpretation, and performance. *Review of Quantitative Finance and Accounting*, 40(4), 691-713.
- Hull, J. C., & White, A. (1987). The pricing of options on assets with stochastic volatilities. *Journal of Finance*, 42(2), 281-300.
- Hull, J. C., & White, A. (1988). An analysis of the bias in option pricing caused by stochastic volatility. *Advances in Futures and Options Research*, 3, 29-61.
- Jenks, G. F. (1967). The data model concept in statistical mapping. *International Yearbook of Cartography*, 7, 186-190.
- Jørgensen, P. L., Nørholm, H., & Skovmand, D. (2011). Overpricing and hidden costs of structured products for retail investors: Evidence from the Danish market for principal protected notes. Working Paper.
- J.P. Morgan/Reuters (1996). *RiskMetrics—Technical Document* (4th ed.). New York: J.P. Morgan.
- Kou, S. G. (2002). A jump-diffusion model for option pricing. *Management Science*, 48(8), 1086-1101.
- Kou, S. G., & Wang, H. (2004). Option pricing under a double exponential jump diffusion model. *Management Science*, 50(9), 1178-1192.
- Lee, S. S., & Mykland, P. A. (2008). Jumps in financial markets: A new nonparametric test and jump dynamics. *Review of Financial Studies*, 21(6), 2535-2563.
- Liang, K. Y., & Zeger, S. L. (1986). Longitudinal data analysis using generalized linear models. *Biometrika*, 73(1), 13-22.
- Longin, F., & Solnik, B. (2001). Extreme correlation of international equity markets. *Journal of Finance*, 56(2), 649-676.
- MacQueen, J. B. (1967). Some methods for classification and analysis of multivariate observations. In L. M. Le Cam & J. Neyman (Eds.), *Proceedings of the Fifth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability* (Vol. 1, pp. 281-297). Berkeley: University of California Press.
- Kolmogorov, A. N. (1933). Sulla determinazione empirica di una legge di distribuzione. *Giornale dell'Istituto Italiano degli Attuari*, 4, 83-91.
- Merton, R. C. (1976). Option pricing when underlying stock returns are discontinuous. *Journal of Financial Economics*, 3(1-2), 125-144.
- Newey, W. K., & West, K. D. (1987). A simple, positive semi-definite, heteroskedasticity and autocorrelation consistent covariance matrix. *Econometrica*, 55(3), 703-708.
- Poon, S. H., & Granger, C. W. J. (2003). Forecasting volatility in financial markets: A review. *Journal of Economic Literature*, 41(2), 478-539.

- Ramezani, C. A., & Zeng, Y. (1998). Maximum likelihood estimation of asymmetric jump-diffusion processes: Application to security prices. *Working Paper*, Southern Illinois University.
- Politis, D. N., & Romano, J. P. (1994). The stationary bootstrap. *Journal of the American Statistical Association*, 89(428), 1303-1313.
- Rubinstein, M. (1994). Implied binomial trees. *Journal of Finance*, 49(3), 771-818.
- Rousseeuw, P. J., & Croux, C. (1993). Alternatives to the median absolute deviation. *Journal of the American Statistical Association*, 88(424), 1273-1283.
- Schertler, A. (2016). Pricing effects when competitors arrive: The case of discount certificates in Germany. *Journal of Banking & Finance*, 68, 84-99.
- Schwarz, G. (1978). Estimating the dimension of a model. *Annals of Statistics*, 6(2), 461-464.
- Schwert, G. W. (1989). Why does stock market volatility change over time? *Journal of Finance*, 44(5), 1115-1153.
- Shapiro, S. S., & Wilk, M. B. (1965). An analysis of variance test for normality (complete samples). *Biometrika*, 52(3-4), 591-611.
- Slocum, T. A., McMaster, R. B., Kessler, F. C., & Howard, H. H. (2013). *Thematic Cartography and Geovisualization* (3rd ed.). Upper Saddle River, NJ: Pearson.
- Smirnov, N. V. (1948). Table for estimating the goodness of fit of empirical distributions. *Annals of Mathematical Statistics*, 19(2), 279-281.
- Stoimenov, P. A., & Wilkens, S. (2005). Are structured products 'fairly' priced? An analysis of the German market for equity-linked instruments. *Journal of Banking & Finance*, 29(12), 2971-2993.
- Szymanowska, M., Ter Horst, J., & Veld, C. (2009). Reverse convertible bonds analyzed. *Journal of Futures Markets*, 29(10), 895-919.
- Tauchen, G. (2011). Stochastic volatility. In D. M. Giles & A. Ullah (Eds.), *The Handbook of Empirical Economics and Finance* (pp. 342-366). CRC Press.
- Todorov, V., & Tauchen, G. (2011). Volatility jumps. *Journal of Business & Economic Statistics*, 29(3), 356-371.
- Tse, Y. K., & Tsui, A. K. C. (2002). A multivariate generalized autoregressive conditional heteroscedasticity model with time-varying correlations. *Journal of Business & Economic Statistics*, 20(3), 351-362.
- Viganò, B., Vitali, S., Moriggia, V., & Zanotti, G. (2019). The investment certificates in the Italian market: A comparison of quoted and estimated prices. *Journal of Financial Management, Markets and Institutions*, 7(2), 1-18.
- Ward, J. H. (1963). Hierarchical grouping to optimize an objective function. *Journal of the American Statistical Association*, 58, 236-244.
- Wilkens, S., Erner, C., & Röder, K. (2003). The pricing of structured products in Germany. *Journal of Derivatives*, 11(1), 55-69.

- White, H. (1980). A heteroskedasticity-consistent covariance matrix estimator and a direct test for heteroskedasticity. *Econometrica*, 48(4), 817-838.
- Wooldridge, J. M. (2010). Econometric analysis of cross section and panel data (2nd ed.). *Cambridge, MA: MIT Press*.
- Zanotti, G. (2024). I costi dei prodotti di investimento: un'analisi del mercato primario dei certificati di investimento. *Bancaria*, 3, 47-59.

DOCUMENTI ISTITUZIONALI

- BANCA D'ITALIA (2024). *Il potere di intervento della Banca d'Italia su strumenti finanziari, depositi strutturati e attività/pratiche finanziarie collegate: quadro giuridico, analitico e metodologico*. Roma, Aprile 2024.
- BANCA D'ITALIA (2025). *Rapporto sulla stabilità finanziaria*, n. 1. Aprile, Roma.
- CONSOB (2014). *Comunicazione sulla distribuzione di prodotti finanziari complessi ai clienti retail*. Comunicazione n. 0097996/14. Commissione Nazionale per le Società e la Borsa, Roma.
- ESMA (2014). *Opinion on complex debt instruments and structured deposits*. ESMA/2014/146.
- ESMA (2015). *MiFID practices for firms selling complex products*. ESMA/2015/1787. European Securities and Markets Authority.
- EUSIPA (2025). *Q1 2025 market report update*. Aprile 2025.

NORMATIVA

- Direttiva 2004/39/CE del Parlamento europeo e del Consiglio del 21 aprile 2004 (MiFID I).
- Direttiva 2014/65/UE del Parlamento europeo e del Consiglio del 15 maggio 2014 (MiFID II).
- Direttiva 2014/59/UE del Parlamento europeo e del Consiglio del 15 maggio 2014 (BRRD - Bank Recovery and Resolution Directive).
- Regolamento (UE) n. 1286/2014 del Parlamento europeo e del Consiglio del 26 novembre 2014 (PRIIPs).
- TUIR - Testo Unico delle Imposte sui Redditi (DPR 22 dicembre 1986, n. 917)

Sitografia

ACEPI - *Associazione Italiana Certificati e Prodotti di Investimento. Vari rapporti e pubblicazioni disponibili su www.acepi.it*

BANCA AKROS, *Sito ufficiale emittente*, <https://www.bancaakros.it/la-nostra-offerta/investment-products/certificates/>

BNP PARIBAS, *Sito ufficiale emittente*, <https://investimenti.bnpparibas.it/>

CITIGROUP, *Sito ufficiale emittente*, <https://it.citifirst.com/Certificati>

GOLDMAN SACHS, *Sito ufficiale emittente*, <https://www.goldman-sachs.it/direct-listing-certificati/>

INTESA SANPAOLO, *Sito ufficiale emittente*, <https://www.intesasanpaolo.com/it/persone-e-famiglie/prodotti/investimenti/certificates/certificates.html>

LEONTEQ, *Sito ufficiale emittente*, <https://certificati.leonteq.com/>

MAREX, *Sito ufficiale emittente*, <https://certificati.marex.com/it/>

MEDIOBANCA, *Sito ufficiale emittente*, <https://certificates.mediobanca.com/it>

NATIXIS, *Sito ufficiale emittente*, <https://equityderivatives.natixis.com/it/>

SOCIÉTÉ GÉNÉRALE, *Sito ufficiale emittente*, <https://prodotti.societegenerale.it/>

UNICREDIT, *Sito ufficiale emittente*, <https://www.investimenti.unicredit.it/>

VONTOBEL, *Sito ufficiale emittente*, <https://markets.vontobel.com/it-it>

Nel corso del presente elaborato è stato fatto ricorso ai seguenti modelli LLM con le seguenti finalità:

- **Claude Sonnet 4.6, Claude Opus 4.6, Claude Sonnet 4.5, Claude Sonnet 3.5:** debug sezioni di codice, generazione di codice funzionale al corretto utilizzo delle API dalla piattaforma *Refinitiv Eikon* di *LSEG Data & Analytics*, Supporto nella predisposizione di procedure automatizzate per l'esecuzione batch del codice, Revisione di errori di battitura e di incoerenze sintattico-grammaticali
- **DeepSeek-R1, DeepSeek-V3:** lettura di alcuni documenti informativi di certificates al fine di estrarre in modo strutturato date, Codici ISIN ed altre informazioni utili a partire da file in formato PDF;
- **Gemini 2.5 flash, Gemini 2.0 flash:** predisposizione delle tabelle in linguaggio LaTeX e del codice utilizzato per la rappresentazione delle figure presentate;
- **GPT 4.5, GPT 4, GPT3.5:** supporto nella riformulazione linguistica di alcune parti testuali al fine di migliorare chiarezza e fluidità espositiva;
- **Notebook LM (Gemini 2.5 Pro):** predisposizione e organizzazione di una libreria strutturata di paper accademici legati al tema degli investment certificates per una consultazione più agevole.

L'utilizzo di tali strumenti ha avuto esclusivamente funzione di supporto tecnico/operativo nel rispetto della Policy "*Uso di strumenti di Intelligenza Artificiale Generativa*" approvato dal Senato Accademico dell'Università degli Studi di Trento in data 5 marzo 2025*. La responsabilità metodologica, analitica e interpretativa dei contenuti resta integralmente in capo all'autore.

(*) Non è stata svolta alcuna analisi relativa agli impatti ambientali e sociali dell'utilizzo dei sistemi di IA generativa. Le valutazioni sui modelli sono state condotte esclusivamente in funzione della capacità di supporto operativo alle attività svolte nell'elaborato.

Annex

Tabella A.01 – *Calendario osservazione premi condizionati ed autocall: certificato NLBNPIT1UX66*

Data di valutazione cedola condizionata	Barriera per il Versamento del Premio Condizionato	Premio Condizionato	Autocall
14 novembre 2023	40% del Prezzo di Riferimento Iniziale	0,93% dell'Importo Nozionale	No
13 dicembre 2023	40% del Prezzo di Riferimento Iniziale	0,93% dell'Importo Nozionale	No
12 gennaio 2024	40% del Prezzo di Riferimento Iniziale	0,93% dell'Importo Nozionale	No
14 febbraio 2024	40% del Prezzo di Riferimento Iniziale	0,93% dell'Importo Nozionale	No
13 marzo 2024	40% del Prezzo di Riferimento Iniziale	0,93% dell'Importo Nozionale	No
12 aprile 2024	40% del Prezzo di Riferimento Iniziale	0,93% dell'Importo Nozionale	100% del Prezzo di Riferimento Iniziale
14 maggio 2024	40% del Prezzo di Riferimento Iniziale	0,93% dell'Importo Nozionale	100% del Prezzo di Riferimento Iniziale
12 giugno 2024	40% del Prezzo di Riferimento Iniziale	0,93% dell'Importo Nozionale	100% del Prezzo di Riferimento Iniziale
12 luglio 2024	40% del Prezzo di Riferimento Iniziale	0,93% dell'Importo Nozionale	100% del Prezzo di Riferimento Iniziale
14 agosto 2024	40% del Prezzo di Riferimento Iniziale	0,93% dell'Importo Nozionale	100% del Prezzo di Riferimento Iniziale
12 settembre 2024	40% del Prezzo di Riferimento Iniziale	0,93% dell'Importo Nozionale	100% del Prezzo di Riferimento Iniziale
14 ottobre 2024	40% del Prezzo di Riferimento Iniziale	0,93% dell'Importo Nozionale	100% del Prezzo di Riferimento Iniziale
4 novembre 2024	40% del Prezzo di Riferimento Iniziale	0,93% dell'Importo Nozionale	100% del Prezzo di Riferimento Iniziale
3 dicembre 2024	40% del Prezzo di Riferimento Iniziale	0,93% dell'Importo Nozionale	100% del Prezzo di Riferimento Iniziale
3 gennaio 2025	40% del Prezzo di Riferimento Iniziale	0,93% dell'Importo Nozionale	100% del Prezzo di Riferimento Iniziale
3 febbraio 2025	40% del Prezzo di Riferimento Iniziale	0,93% dell'Importo Nozionale	100% del Prezzo di Riferimento Iniziale
3 marzo 2025	40% del Prezzo di Riferimento Iniziale	0,93% dell'Importo Nozionale	100% del Prezzo di Riferimento Iniziale
3 aprile 2025	40% del Prezzo di Riferimento Iniziale	0,93% dell'Importo Nozionale	100% del Prezzo di Riferimento Iniziale
6 maggio 2025	40% del Prezzo di Riferimento Iniziale	0,93% dell'Importo Nozionale	100% del Prezzo di Riferimento Iniziale
3 giugno 2025	40% del Prezzo di Riferimento Iniziale	0,93% dell'Importo Nozionale	100% del Prezzo di Riferimento Iniziale
3 luglio 2025	40% del Prezzo di Riferimento Iniziale	0,93% dell'Importo Nozionale	100% del Prezzo di Riferimento Iniziale
4 agosto 2025	40% del Prezzo di Riferimento Iniziale	0,93% dell'Importo Nozionale	100% del Prezzo di Riferimento Iniziale
3 settembre 2025	40% del Prezzo di Riferimento Iniziale	0,93% dell'Importo Nozionale	100% del Prezzo di Riferimento Iniziale
3 ottobre 2025	40% del Prezzo di Riferimento Iniziale	0,93% dell'Importo Nozionale	100% del Prezzo di Riferimento Iniziale
3 novembre 2025	40% del Prezzo di Riferimento Iniziale	0,93% dell'Importo Nozionale	100% del Prezzo di Riferimento Iniziale
3 dicembre 2025	40% del Prezzo di Riferimento Iniziale	0,93% dell'Importo Nozionale	100% del Prezzo di Riferimento Iniziale
5 gennaio 2026	40% del Prezzo di Riferimento Iniziale	0,93% dell'Importo Nozionale	100% del Prezzo di Riferimento Iniziale
3 febbraio 2026	40% del Prezzo di Riferimento Iniziale	0,93% dell'Importo Nozionale	100% del Prezzo di Riferimento Iniziale
3 marzo 2026	40% del Prezzo di Riferimento Iniziale	0,93% dell'Importo Nozionale	100% del Prezzo di Riferimento Iniziale
7 aprile 2026	40% del Prezzo di Riferimento Iniziale	0,93% dell'Importo Nozionale	100% del Prezzo di Riferimento Iniziale
5 maggio 2026	40% del Prezzo di Riferimento Iniziale	0,93% dell'Importo Nozionale	100% del Prezzo di Riferimento Iniziale
3 giugno 2026	40% del Prezzo di Riferimento Iniziale	0,93% dell'Importo Nozionale	100% del Prezzo di Riferimento Iniziale
6 luglio 2026	40% del Prezzo di Riferimento Iniziale	0,93% dell'Importo Nozionale	100% del Prezzo di Riferimento Iniziale
3 agosto 2026	40% del Prezzo di Riferimento Iniziale	0,93% dell'Importo Nozionale	100% del Prezzo di Riferimento Iniziale
3 settembre 2026	40% del Prezzo di Riferimento Iniziale	0,93% dell'Importo Nozionale	100% del Prezzo di Riferimento Iniziale
5 ottobre 2026	40% del Prezzo di Riferimento Iniziale	0,93% dell'Importo Nozionale	No (Scadenza naturale Certificato)

Tabella A.02 – *Validazione statistica modello Gamma – Jumps di volatilità (test Kolmogorov-Smirnov)*

Asset	Statistica KS	p-value
Enel	0.1636	0.8549
Vestas Wind System	0.2049	0.6242
NextEra Energy	0.1273	0.9668

Tabella A.03 – *Validazione statistica modello double exponential Kou – Jumps di prezzo (test Kolmogorov-Smirnov)¹⁰⁰*

Asset	Jump Positivi (Up)		Jump Negativi (Down)	
	p-value	Stat. KS	p-value	Stat. KS
Enel	0.1625	0.7150	0.1687	0.4253
Vestas Wind System	0.3762	0.4822	0.3708	0.3488
NextEra Energy	0.2404	0.4280	0.0029*	0.4967

¹⁰⁰ I risultati del test di Kolmogorov-Smirnov confermano che le ampiezze dei salti sono generalmente compatibili con la distribuzione esponenziale di Kou, 2002. P-value > 0,05 per la quasi totalità degli eventi considerati con unica eccezione rilevante riguardante la coda negativa di NextEra Energy. Si segnala che la potenza di tale test risulta comunque limitata per via della ridotta numerosità del campione di Jumps.

Figura A.01– Evoluzione probabilità simulata di perdita della protezione del capitale a scadenza: certificato NLBNPIT1UX66¹⁰¹

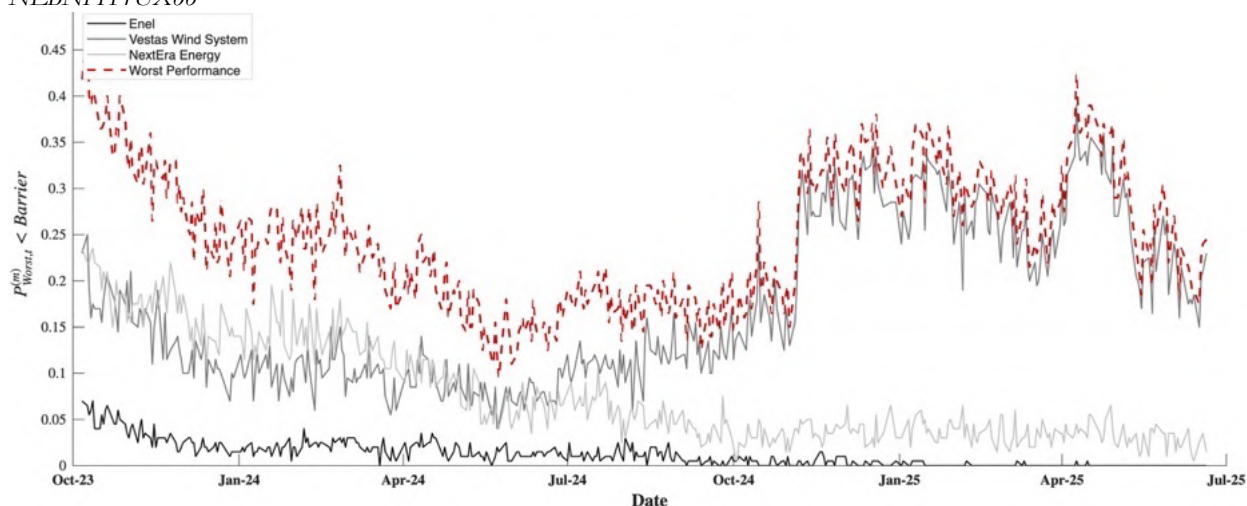
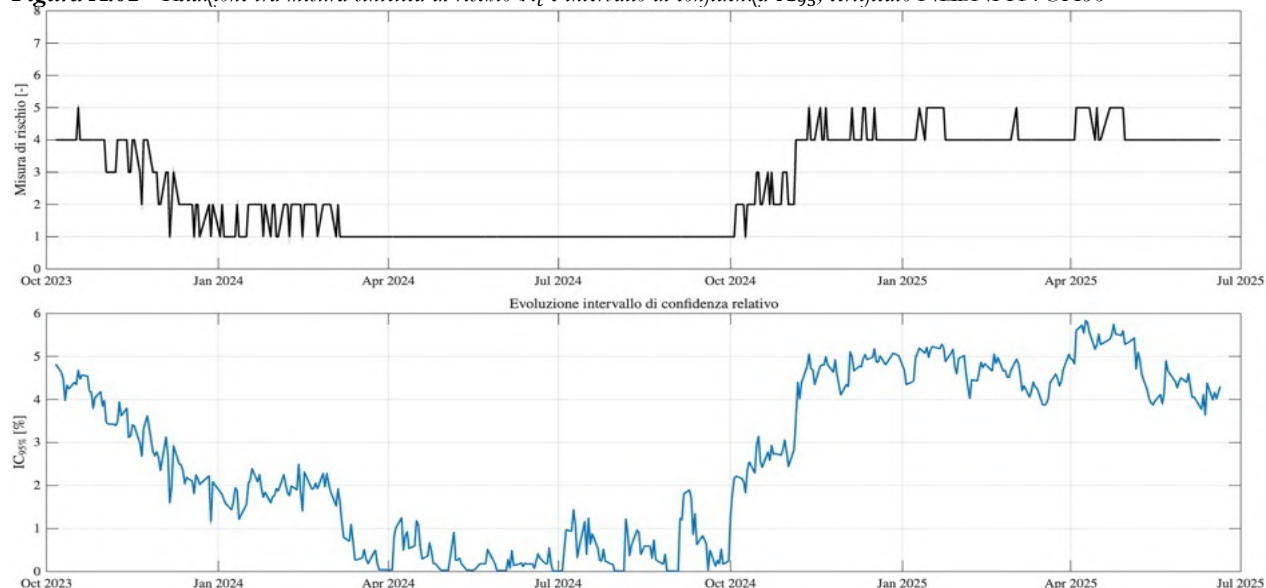
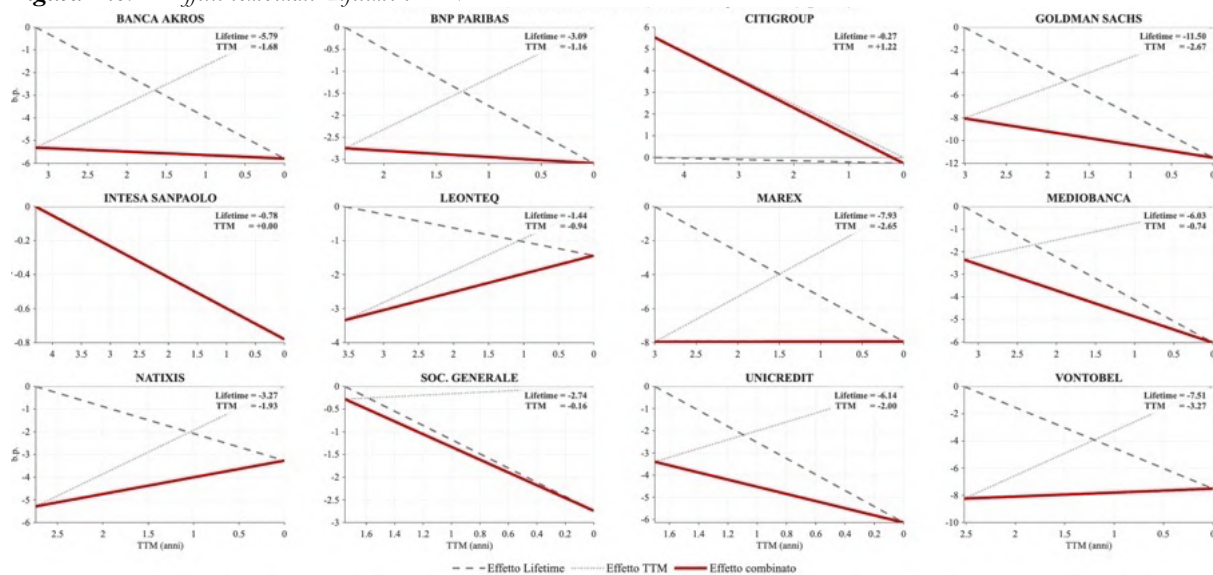


Figura A.02 - Relazione tra misura sintetica di rischio $\mathcal{R}_t$ e intervallo di confidenza IC_{95} , certificato NLBNPIT1UX66



¹⁰¹ Nella figura è illustrata l'evoluzione, nel tempo, della probabilità che i sottostanti, o almeno uno di essi (*Worst Performer*), scendano al di sotto della Barriera, fissata al 40% del valore registrato alla data di Settlement t_0 . Dalla lettura emerge con chiarezza come VWS sia il principale contributore al rischio complessivo del certificato: la marcata contrazione del titolo osservata a partire dal mese di novembre 2024 ha comportato infatti un deciso incremento della probabilità di violazione della barriera a scadenza. Tale probabilità varia da circa il 10% rilevato a fine settembre 2024 a oltre il 40% pochi mesi più tardi.

Figura A.03 – Effetti combinati Lifetime e TTM¹⁰²



¹⁰² La figura riporta, per ciascuno dei dodici emittenti analizzati, la decomposizione dell'effetto temporale sul markup del contributo combinato delle variabili Lifetime e TTM. Il contributo di ciascuna variabile è calcolato come prodotto tra il rispettivo coefficiente stimato e il valore assunto dalla variabile lungo la vita del prodotto: $\beta_{\text{Lifetime}} \times \text{Lifetime}$ per la componente di ciclo di vita (effetto Lifetime) e $\beta_{\text{TTM}} \times \text{anni a scadenza}$ per la componente di durata assoluta (effetto TTM). I valori di β_{Lifetime} e β_{TTM} riportati in ciascun pannello corrispondono alle stime OLS presentate nella **Tabella 4.11**. Come durata del prodotto rappresentativo (asse x) per ciascun emittente è stata scelta la durata media dei prodotti emessi dallo stesso come riportato nella **Tabella 4.1**. Tale figura mostra come per la quasi totalità degli emittenti si osservi una compressione dei costi impliciti nel corso della vita dello strumento nonostante l'evidenza di coefficienti β_{TTM} negativi e significativi.

Figura A.04 – Rischio e Rendimento dei portafogli Ptf_{under} e Ptf_{over}, N=15 - 20 - 30, Rolling window 9 - 12 - 18 mesi¹⁰⁵

Ris. Metrica	N = 15 asset						N = 20 asset						N = 30 asset					
	9 mesi		12 mesi		18 mesi		9 mesi		12 mesi		18 mesi		9 mesi		12 mesi		18 mesi	
	U	O Δ(SE) p	U	O Δ(SE) p	U	O Δ(SE) p	U	O Δ(SE) p	U	O Δ(SE) p	U	O Δ(SE) p	U	O Δ(SE) p	U	O Δ(SE) p	U	O Δ(SE) p
Tutti i Prodotti																		
Rend. annu. (%)	2.4	-9.2 11.6***	3.7	-9.4 13.1***	6.4	-8.4 14.8***	3.6	-9.7 13.2***	4.6	-8.4 13.1***	7.1	-7.2 14.3***	4.8	-9.0 13.8***	5.9	-6.9 12.8***	8.3	-5.7 14.0***
Sharpe	-0.2	-91 0.89***	.08	-89 0.97***	.47	-7.4 1.21***	.15	-93 1.07***	.23	-86 1.10***	.64	-70 1.34***	.38	-85 1.24***	.50	-78 1.28***	.92	-63 1.35***
Volatilità (%)	8.1	13.6 (-0.82)	7.4	13.7 (-0.70)	5.9	16.1 (-0.54)	7.4	13.6 (-0.98)	6.5	13.2 (-0.64)	5.3	15.7 (-0.51)	6.3	13.5 (-1.17)	5.6	12.8 (-0.59)	5.0	15.0 (-0.32)
Max Draw.	-6.7	-13.7 7.1***	-6.4	-16.3 10.5***	-5.5	-25.4 30.0***	-5.8	-13.7 7.9***	-5.4	-15.9 10.4***	-5.0	-23.6 18.6***	-4.8	-13.2 8.4***	-4.3	-14.5 10.2***	-4.9	-21.2 16.3***
VAR 5%	-79	-1.44 0.65***	-70	-1.48 0.78***	-5.4	-1.64 1.10***	-71	-1.44 0.72***	-61	-1.40 0.79***	-47	-1.59 1.12***	-61	-1.43 0.82***	-52	-1.36 0.84***	-43	-1.52 1.09***
Rischio Basso(1-2)																		
Rend. annu. (%)	4.2	7.7 (-3.4)	4.6	6.6 (-1.9)	6.7	3.0 3.7***	5.1	6.6 (-1.6)	5.5	5.5 (-0.1)	7.6	3.7 4.0***	5.9	5.4 (0.47)	6.5	4.9 1.6***	8.8	4.4 4.5***
Sharpe	.16	.69 (-0.53)	.20	.50 (-0.31)	.53	-.06 5.9***	.33	.53 (-0.20)	.37	.33 0.04	.76	.00 7.6***	.53	.32 0.20	.64	.21 4.2***	.10	.94***
Volatilità (%)	6.9	6.0 (0.33)	6.4	6.0 (0.21)	5.7	6.7 1.0***	6.1	5.8 (0.29)	5.6	6.0 (-0.36***)	5.2	7.1 1.9***	5.5	5.8 (-0.33)	5.2	6.1 0.91***	4.9	7.3 2.4***
Max Draw.	-5.2	-4.0 (0.44)	-0.7	.99773% (-0.23)	-5.2	-7.7 2.6***	-4.4	-4.2 (-0.43)	-4.2	-4.7 0.47***	-8.1	3.4***	-3.8	-4.4 (0.42)	-5.1	1.38***	-4.7	-8.3 3.7***
VAR 5%	-66	-.59 (-0.03)	-61	-.60 (-0.02)	-.53	-.67 0.15***	-.57	-.59 (-0.03)	-.52	-.61 0.09***	-.46	-.68 0.22***	-.51	-.69 0.08***	-.47	-.61 0.13***	-.44	-.71 0.27***
Rischio medio(3-5)																		
Rend. annu. (%)	2.3	7.9***	3.6	-4.7 8.3***	6.5	-5.8 12.3***	2.8	-5.1 7.9***	3.3	-4.4 7.7***	6.1	-5.7 11.8***	1.9	-4.5 6.4***	2.5	-4.0 6.5***	5.2	-5.3 10.5***
Sharpe	.18	.53 (0.71***)	.23	-.58 0.82***	.61	-.69 1.30***	.21	-.53 0.74***	.23	-.59 0.82***	.55	-.70 1.25***	.05	-.53 0.15***	.09	-.58 0.67***	.34	-.70 1.04***
Volatilità (%)	8.4	13.4 (-5.0***)	6.9	12.5 (-0.075)	5.1	13.7 (-8.6***)	7.5	12.8 (-5.5***)	6.5	12.2 (-0.068)	4.9	13.2 (-8.4***)	7.0	12.2 (-2.95)	6.3	11.7 (-5.4***)	4.8	12.7 (-7.9***)
Max Draw.	-6.9	-12.7 5.8***	-6.2	-13.5 7.3***	-5.1	-21.3 16.3***	-6.0	-12.0 6.0***	-6.0	-12.8 6.8***	-4.9	-20.7 15.8***	-5.8	-11.3 5.5***	-6.0	-12.1 6.1***	-5.3	-19.6 14.4***
VAR 5%	-84	-1.40 0.56***	-68	-1.29 0.61***	-.45	-1.38 0.93***	-.75	-1.35 0.60***	-.64	-1.26 0.92***	-.42	-1.34 0.91***	-.72	-1.29 0.57***	-.64	-1.23 0.59***	-.44	-1.30 0.86***
rischio alto(6-7)																		
Rend. annu. (%)	3.7	-9.6 5.9***	-3.7	-9.7 6.0***	-3.0	-8.7 5.5***	-3.4	-10.3 6.9***	3.0	-8.6 5.6***	-4.3	-8.1 3.8***	-7.6	-16.3 8.7***	-1.7	-7.8 6.0***		
Sharpe	-.56	-.93 0.32***	-.56	-.88 0.33***	-.43	-.75 0.32***	-.55	-.96 0.45***	-.53	-.86 0.38***	-.53	-.74 0.21***	-.70	-.98 0.27***	-.38	-.71 0.38***		
Volatilità (%)	12.2	13.8 (-7.808)	12.2	14.1 (-7.84)	14.6	16.6 (-2.005)	11.9	13.9 (-4.949)	11.8	13.5 (-1.639)	14.6	15.9 (-2.47)	14.5	18.6 (-4.678)	12.4	14.3 (-1.653)		
Max Draw.	-10.2	-14.1 3.9***	-11.6	-17.4 5.9***	-17.5	-26.4 8.0***	-10.1	-14.3 4.2***	-11.1	-16.4 5.9***	-18.8	-24.6 5.8***	-14.6	-20.4 5.8***	-12.9	-18.0 5.1***		
VAR 5%	-126	-1.47 0.20***	-126	-1.52 0.26***	-148	-1.08 0.20***	-125	-1.47 0.22***	-123	-1.44 0.20***	-151	-1.62 0.11***	-156	-1.94 0.38***	-129	-1.50 0.21***		
n	250		189		65		244		182		26		95		12		n.d.	

^{105:} * U e O indicano i valori medi di Ptf_{under} e Ptf_{over}; Δ(SE) riporta il differenziale con il relativo standard error Newey-West unilaterale. “ % “ evidenzia la percentuale di portafogli in cui Ptf_{over} ha sovraperformato Ptf_{under}.